เอกสารในห้องเรียน

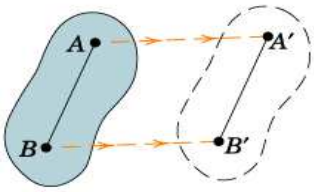
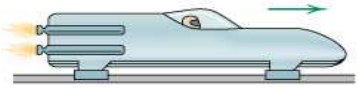
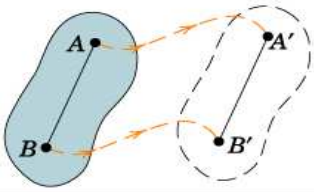
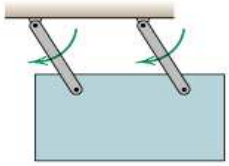
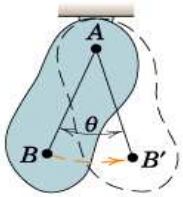
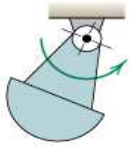
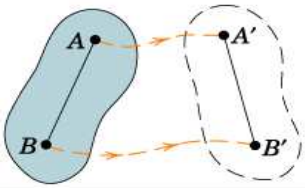
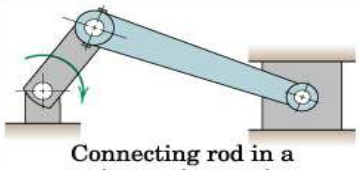
บทที่ 5 Plane Kinematics of Rigid bodies

(คิเนเมติกส์ของวัตถุเกร็งในระนาบ)

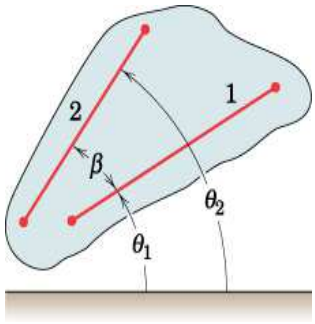
กล่าวนำ

ในบทนี้จะศึกษาการเคลื่อนที่แบบ Kinematics ของวัตถุเกร็งในระนาบในรูปแบบต่างๆ เอกสารนี้เป็นเอกสารประกอบใช้ระหว่างเรียนในห้อง ที่สรุปเนื้อหา สมการวิเคราะห์ และโจทย์ปัญหาตัวอย่างต่างๆ ในตำราอ้างอิง [1] (แบบปกปิดวิธีการวิเคราะห์บางส่วน) ทั้งนี้เพื่อให้นักศึกษามีเอกสารในระหว่างเรียน และสามารถจดบันทึกไปพร้อมกับการบรรยายในห้องเรียนได้อย่างสะดวก

5.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ (Plane Motion of Rigid body)

Type of Rigid-Body Plane Motion		Example	
(a) Rectilinear translation		 Rocket test sled	**การเลื่อนไถลในแนวตรง:** เส้นทุกเส้นบนวัตถุขนานกับตำแหน่งเดิม และจุดจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง
(b) Curvilinear translation		 Parallel-link swinging plate	**การเลื่อนไถลในแนวโค้ง:** เส้นทุกเส้นบนวัตถุขนานกับตำแหน่งเดิม แต่จุดจะเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง
(c) Fixed-axis rotation		 Compound pendulum	**การหมุนรอบแกนคงที่:** ทุกเส้นหมุนกรวดไปด้วยมุมเท่ากัน และจุดเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกนหมุน
(d) General plane motion		 Connecting rod in a reciprocating engine	**การเคลื่อนที่แบบทั่วไป:** เป็นการรวมกันระหว่างการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไถลกับการหมุนรอบแกนคงที่

5.2 การเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotation)



การเคลื่อนที่แบบหมุน: ของเส้น

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad or \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \quad or \quad \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta$$

เมื่อ

θ = การกระจัดเชิงมุม (Angular displacement: ***rad***)

ω = ความเร็วเชิงมุม (Angular velocity: ***rad/s***)

α = ความเร่งเชิงมุม (Angular acceleration: ***rad/s^2***)

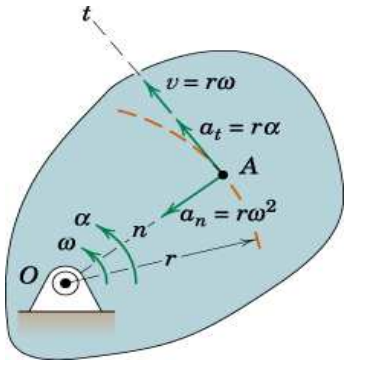
กรณี ความเร่งเชิงหมุนคงที่ : $\alpha = const.$

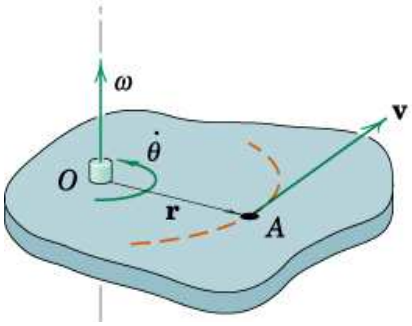
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

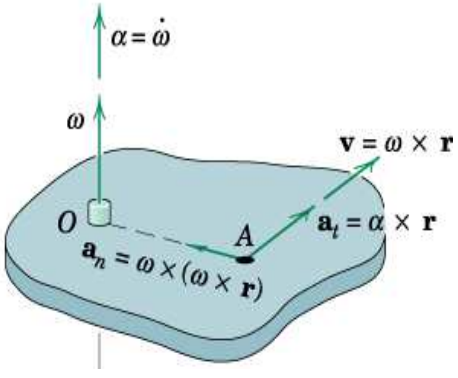
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

➢ การหมุนรอบแกนคงที่ (Rotation about a Fixed Axis)







ความสัมพันธ์ การเคลื่อนที่เชิงเส้น – เชิงมุม: ของจุด A

1) *ความสัมพันธ์เชิงขนาด (Scalar relations)*

$$v = \omega r$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \omega v$$

$$a_t = r\alpha$$

2) *ความสัมพันธ์เชิงเวกเตอร์ (Vectors relations)*

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\therefore \ \vec{a} = \dot{\vec{V}} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

สรุป ความเร็ว และความเร่งของการหมุน

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = |\omega r|\,\hat{e}_t$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -|r\omega^2|\,\hat{e}_r$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = |\alpha r|\,\hat{e}_t$$

เมื่อ $\vec{V}$, $\vec{a}$: เวกเตอร์ความเร็วและความเร่งเชิงเส้น ของจุด A

$\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$: เวกเตอร์ความเร็วและความเร่งเชิงมุม ของ Rigid body

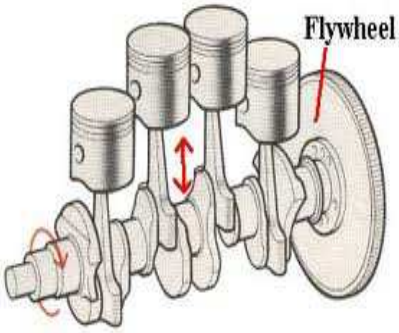
$\vec{r}$: เวกเตอร์ความยาวจากจุดหมุน O ไปยังจุด A

(จุดที่ต้องการหาความเร็ว และความเร่ง)

ส่วนที่ 1 ตัวอย่าง

Sample Problem 5/1

A flywheel rotating freely at 1800 rev/min clockwise is subjected to a variable counterclockwise torque which is first applied at time $t = 0$. The torque produces a counterclockwise angular acceleration $\alpha = 4t$ rad/s^2, where t is the time in seconds during which the torque is applied. Determine (*a*) the time required for the flywheel to reduce its clockwise angular speed to 900 rev/min, (*b*) the time required for the flywheel to reverse its direction of rotation, and (*c*) the total number of revolutions, clockwise plus counterclockwise, turned by the flywheel during the first 14 seconds of torque application.



โจทย์กำหนด ค่าความเร็วรอบเริ่ม $n_{t=0s}=1800\,rpm\,(CW)$

ความเร่งเชิงมุม $\alpha=4t\ rad/s\,(CCW)$

โจทย์ถามหา a) เวลา t ที่ความเร็วรอบการหมุนเท่ากับ 900 rev/min, CW : $t_{@n=900\ rpm,CW}$=?

b) เวลา t ที่ความเร็ว flywheel เปลี่ยนทิศทางการหมุน : $t_{@n=0\ rpm}$=?

c) จำนวนรอบการหมุนทั้งหมด ทั้ง CW, CCW ในช่วงเวลา t=0 - 14 วินาที

วิธีทำ

a) เวลา t ที่ความเร็วรอบการหมุนเท่ากับ 900 rev/min (CW)

กำหนดทิศ CCW ให้เป็น + : ดังนั้น $\Rightarrow \begin{cases} n_{t=0s}=1800\,rpm\,(CW)\Rightarrow \omega_{t=0s}=-1800\dfrac{2\pi}{60}=-60\pi\ rad/s \\ \alpha=4t\ rad/s\,(CCW) \ \Rightarrow\ \alpha=4t\ rad/s^2 \end{cases}$

จาก : $\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}\ \rightarrow\ \int_{-60\pi}^{\omega}d\omega=\int_0^t\alpha\,dt=\int_0^t(4t)\,dt\ \Rightarrow\ \omega=-60\pi+2t^2\ rad/s\ \rightarrow (1)$

ดังนั้น หา t ที่ $n=900\,rpm\,(CW)\Rightarrow \omega=-900\dfrac{2\pi}{60}=-30\pi\ rad/s$

เพราะฉะนั้นเวลา t ที่ $\omega=-30\pi\ rad/s$ พิจารณาจากสมการ (1) นั้นคือ

$-30\pi=-60\pi+2t^2\ \Rightarrow t^2=15\pi\ \therefore\ t=6.86\,s$ *Ans*

b) เวลา t ที่ความเร็ว flywheel เปลี่ยนทิศทางการหมุน: นั้นคือ หา เวลา t ที่ $\omega=0\ rad/s$

จาก (1) เวลาที่ $\omega=0\ rad/s$ คือ

$0=-60\pi+2t^2\ \Rightarrow t^2=30\pi\ \therefore\ t=9.71\,s$ *Ans*

c) จำนวนรอบการหมุนทั้งหมด ทั้ง CW, CCW ในช่วงเวลา t=0 - 14 วินาที

จำนวนรอบการหมุนของ flywheel (N_t) ในช่วงเวลา 0 – 14 sec ซึ่งผลจากข้อ b) พบว่าที่เวลา t=6.86 s flywheel จะเปลี่ยนทิศทางการหมุนจาก CW เป็น CCW ดังนั้นจำนวนรอบทั้งหมดจะต้องแบ่งคิดเป็น 2 ช่วง คือ **1) CW: $N_{0\text{-}9.71sec}$** และ **2) CCW: $N_{9.71\text{-}14sec}$**

ซึ่งจำนวนรอบของการหมุนหาได้จากความสัมพันธ์ของการกระจัดเชิงมุม นั้นคือ $N=\frac{\theta,rad}{2\pi,rad/rev}$

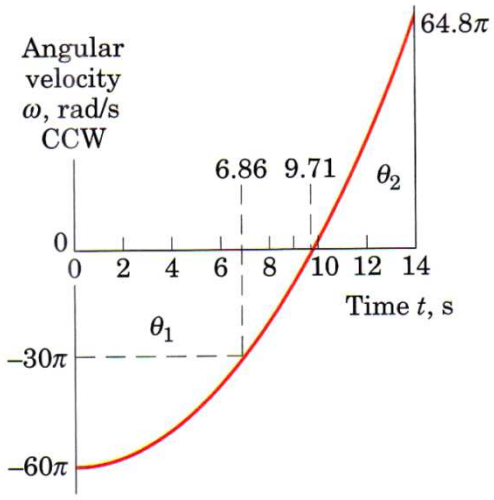
ดังนั้นจะต้องหาความสัมพันธ์การกระจัดเชิงมุม θ นั้นคือ

จาก : $\omega=\frac{d\theta}{dt}\rightarrow\int_0^{\theta}d\theta=\int_0^t\omega\,dt=\int_0^t\left(-60\pi+2t^2\right)dt\Rightarrow\theta=-60\pi t+\frac{2}{3}t^3\ rad\rightarrow(2)$

ดังนั้น $\Rightarrow\begin{cases}CW:0-9.71\text{sec}\Rightarrow\theta_{0-9.71\text{sec}}=\left[-60\pi t+\frac{2}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=9.71}=-1200\ rad\,\#\\ CCW:9.71\text{–}14\text{sec}\Rightarrow\theta_{9.71\text{–}14\text{sec}}=\left[-60\pi t+\frac{2}{3}t^3\right]_{t=9.71}^{t=14}=410\ rad\,\#\end{cases}$

จำนวนรอบ

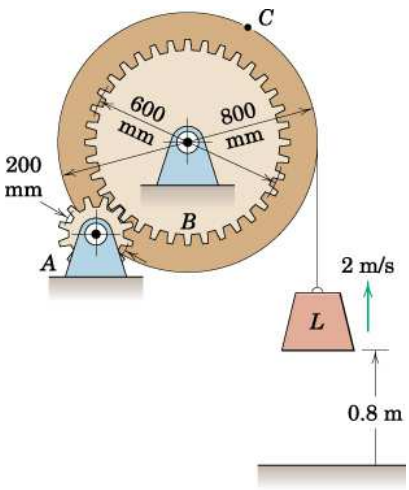
$\Rightarrow\begin{cases}CW:0-9.71\text{sec}\Rightarrow N_{0-9.71\text{sec}}=\frac{\theta_{0-9.71\text{sec}}}{2\pi}=\left|\frac{-1200}{2\pi}\right|=194.2\,rev.\#\\ CCW:9.71\text{–}14\text{sec}\Rightarrow N_{9.71\text{–}14\text{sec}}=\frac{\theta_{9.71\text{–}14\text{sec}}}{2\pi}=\left|\frac{410}{2\pi}\right|=65.3\ rev.\#\end{cases}\Rightarrow N_t=194.2+65.3=259\,rev.\underline{Ans}$



กราฟแสดงความสัมพันธ์ $\omega-t$ ของ Flywheel

Sample Problem 5/2

The pinion A of the hoist motor drives gear B, which is attached to the hoisting drum. The load L is lifted from its rest position and acquires an upward velocity of 2 m/s in a vertical rise of 0.8 m with constant acceleration. As the load passes this position, compute (a) the acceleration of point C on the cable in contact with the drum and (b) the angular velocity and angular acceleration of the pinion A.



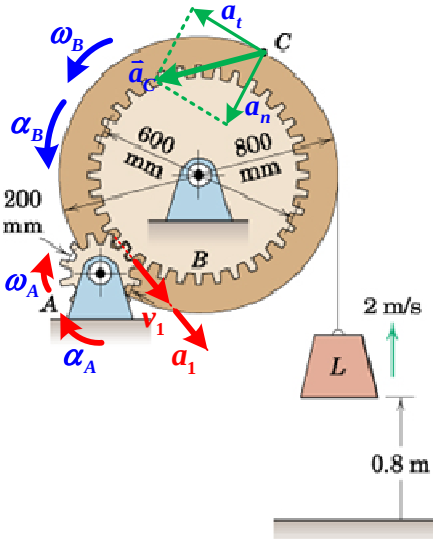
โจทย์กำหนด Load L : เคลื่อนที่ขึ้นด้วย $a=const.$ $\Rightarrow \begin{cases} y=0\,m \Rightarrow v=0\,m/s \\ y=0.8\,m \Rightarrow v=2\,m/s \end{cases}$

โจทย์ถามหา a) ความเร่งของจุด C: $\vec{a}_C=?$

b) ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของ pinion A: $\vec{\omega}_A=?,\ \vec{\alpha}_A=?$

วิธีทำ a) หาความเร่งของจุด C: $\vec{a}_C=?$

พิจารณารูปความเร็วที่จุด C



เขียนสมการที่มีตัวแปรที่โจทย์ ถามหา $\vec{a}_C$ นั้นคือ

$$\vec{a}_c=\vec{a}_t+\vec{a}_n \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}_t|=a_L \\ |\vec{a}_n|=\dfrac{v_C^2}{r_C} \end{cases} \rightarrow (1)$$

จาก (1) มีตัวแปรไม่ทราบค่าคือ a_L ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของ Load L (ความเร่งคงที่) นั้นคือ

จาก $\begin{aligned} v^2&=v_0^2+2a_L(s-s_0) \\ 2^2&=0+2a_L(0.8-0) \Rightarrow a_L=2.5\,m/s^2\,\# \end{aligned}$ แทนค่าที่ทราบลงใน (1) จะได้

$$\vec{a}_c=\vec{a}_t+\vec{a}_n \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}_t|=a_L=2.5\,m/s^2 \\ |\vec{a}_n|=\dfrac{v_C^2}{r_C}=\dfrac{2^2}{0.4}=10\,m/s^2 \end{cases}$$

$$\therefore |\vec{a}_c|=\sqrt{2.5^2+10^2}=10.31\,m/s^2 \quad Ans$$

b) ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของ pinion A: $\vec{\omega}_A=?,\ \vec{\alpha}_A=?$

เขียนสมการที่มีตัวแปรที่โจทย์ ถามหา $\vec{\omega}_A=?,\ \vec{\alpha}_A=?$ นั้นคือ

$$pinion\ A \Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_A=\dfrac{v_1}{r_A}\ (CW) \\ \vec{\alpha}_A=\dfrac{a_1}{r_A}\ (CW) \end{cases} \rightarrow (2)$$

จาก (2) มีตัวแปรไม่ทราบค่าคือ $v_1,\ a_1$ ซึ่งหาได้จาก Gear นั้นคือ

$$Gear\ B \Rightarrow \begin{cases} v_1=\omega_B r_B \\ a_1=\alpha_B r_B \end{cases} \rightarrow (3)$$

จาก (3) มีตัวแปรไม่ทราบค่าคือ ω_B, α_B ซึ่งหาได้จาก point C on hoisting drum นั้นคือ

$$point\ C \Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_B = \vec{\omega}_C = \dfrac{v_C}{r_C} = \dfrac{2}{0.4} = 5\,rad/s, CCW \\ \vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_C = \dfrac{a_C}{r_C} = \dfrac{2.5}{0.4} = 6.25\,rad/s^2, CCW \end{cases}$$

หมายเหตุ: เนื่องจาก Gear B และ Hoisting drum ถูกยึดติดกัน จึงทำให้ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมเท่ากัน (มันหมุนไปพร้อมกันนั้นเอง)

ดังนั้นแทนค่า ω_B, α_B ใน (3) จะได้

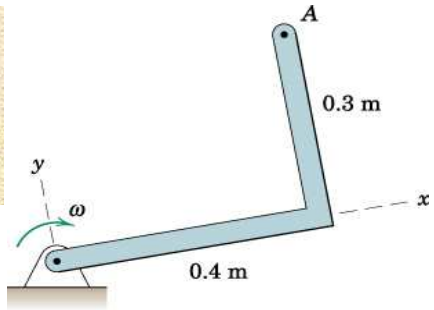
$$Gear\ B \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5r_B \\ a_1 = 6.25r_B \end{cases}$$

ดังนั้นแทนค่า ω_B, α_B ใน (2) จะได้

$$pinion\ A \Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_A = \dfrac{5r_B}{r_A} = \dfrac{5(0.3)}{0.1} = 15\,rad/s\,(CW) & \underline{Ans} \\ \vec{\alpha}_A = \dfrac{6.25r_B}{r_A} = \dfrac{6.25(0.3)}{0.1} = 18.75\,rad/s\,(CW) & \underline{Ans} \end{cases}$$

Sample Problem 5/3

The right-angle bar rotates clockwise with an angular velocity which is decreasing at the rate of 4 rad/s^2. Write the vector expressions for the velocity and acceleration of point A when ω = 2 rad/s.

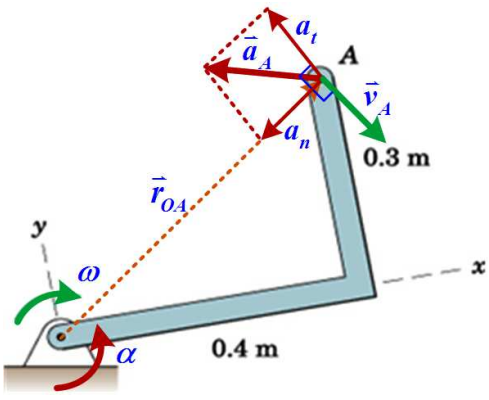


<u>โจทย์กำหนด</u> Right-angle bar: หมุนด้วย (กำหนด CCW เป็นบวก)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega} = 2\,rad/s, CW \Rightarrow \vec{\omega} = -2\hat{k}\,rad/s \\ \vec{\alpha} = -4\,rad/s^2, CW \Rightarrow \vec{\alpha} = 4\hat{k}\,rad/s^2 \end{cases}$$

<u>โจทย์ถามหา</u> a) ความเร็วและความเร่งเชิงเส้นของจุด A: $\vec{v}_A = ?,\ \vec{a}_A = ?$

<u>วิธีทำ</u> **หาความเร็วและความเร่งของจุด A:** $\vec{v}_A = ?,\ \vec{a}_A = ?$



$$Velocity: \quad \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA} = \left(-2\hat{k}\right) \times \left(0.4\hat{i} + 0.3\hat{j}\right) = 0.6\hat{i} - 0.8\hat{j}\ m/s$$

$$Aceleration: \begin{cases} \vec{a}_{A,t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{OA} = \left(4\hat{k}\right) \times \left(0.4\hat{i} + 0.3\hat{j}\right) = -1.2\hat{i} + 1.6\hat{j}\ m/s^2 \\ \vec{a}_{A,n} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A = \left(-2\hat{k}\right) \times \left(0.6\hat{i} + 0.8\hat{j}\right) = -1.6\hat{i} - 1.2\hat{j}\ m/s^2 \\ \therefore \vec{a}_A = -2.8\hat{i} + 0.4\hat{j}\ m/s^2 \end{cases}$$

ดังนั้น $$\Rightarrow \begin{cases} |\vec{v}_A| = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1\,m/s & \underline{Ans} \\ |\vec{a}_A| = \sqrt{2.8^2 + 0.4^2} = 2.83\,m/s^2 & \underline{Ans} \end{cases}$$

5.3 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์ (Absolute Motion)

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์ของจุดใดๆ สามารถกระทำได้ดังนี้

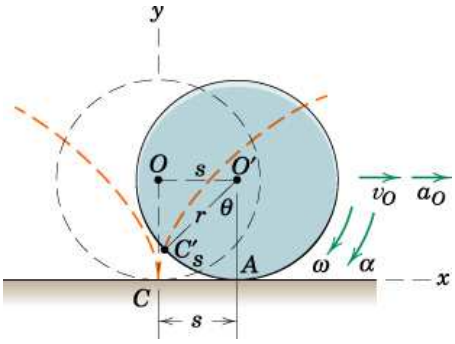
1) หาความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต ระหว่างการกระจัดเชิงเส้น และการกระจัดเชิงมุม ($x = f(\theta)$)

2) หาอนุพันธ์ครั้งที่หนึ่ง จะได้ความเร็ว ทั้งความเร็วเชิงเส้นและเชิงมุม $\left[\dot{x} = \frac{d}{dt}(f(\theta))\right]$

3) หาอนุพันธ์ครั้งที่สอง จะได้ความเร่ง ทั้งความเร่งเชิงเส้นและเชิงมุม $\left[\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(f(\theta))\right]$

Sample Problem 5/4

A wheel of radius r rolls on a flat surface without slipping. Determine the angular motion of the wheel in terms of the linear motion of its center O. Also determine the acceleration of a point on the rim of the wheel as the point comes into contact with the surface on which the wheel rolls.



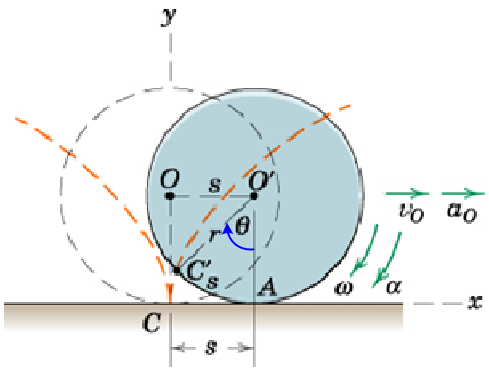
โจทย์กำหนด จุด Center O: มีการเคลื่อนที่เชิงเส้น คือ v_O, a_o

โจทย์ถามหา a) หาความสัมพันธ์การเคลื่อนที่เชิงมุมให้เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่เชิงเส้นของจุด center O

b) หาความเร่งที่ขอบ (rim) ของ wheel ณ ตำแหน่งที่สัมผัสกับพื้น

วิธีทำ **a) หาความสัมพันธ์การเคลื่อนที่เชิงมุมให้เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่เชิงเส้นของจุด O (s, v_O, a_o)**

จะพบว่าการเคลื่อนที่ของจุด Center O (v_O, a_o) มีทิศทางไปในแนวแกน x ดังนั้นการจะหาการเคลื่อนที่เชิงมุมของ wheel จะต้องเริ่มด้วยการหาความสัมพันธ์การกระจัดเชิงเส้นในทิศทาง x (ระยะ s ดังรูป) กับกระจัดเชิงมุมของการหมุน (θ) จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบต่อเวลาครั้งที่ 1 จะได้ความสัมพันธ์ของความเร็ว และหาอนุพันธ์เทียบต่อเวลาครั้งที่ 2 จะได้ความสัมพันธ์ของความเร่ง (ตามหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เชิงเส้นและเชิงมุม 3 ข้อที่นำเสนอ)



ลักษณะการเคลื่อนที่เมื่อจุด center o เคลื่อนที่ในทิศ +x ได้ระยะ s (การกระจัดเชิงเส้นของจุด o) จะทำให้ wheel หมุนไปด้วยการกระจัดเชิงมุม (θ) ที่วัดกับเส้นแนวดิ่งดังรูป

การกระจัด: วัดระยะการเคลื่อนที่ของจุด O

$Displacement: \quad s = r\theta \rightarrow (1)$ Ans

ความเร็ว:

$$Velocity: \frac{d(1)}{dt} \Rightarrow \dot{s} = r\dot{\theta}$$
$$\Rightarrow v_0 = r\omega \rightarrow (2)$$ Ans

ความเร่ง:

$$Acceleration: \frac{d(2)}{dt} \Rightarrow \dot{v}_0 = r\dot{\omega}$$
$$\Rightarrow a_0 = r\alpha \rightarrow (3)$$ Ans

b) หาความเร่งที่ขอบ (rim) ของ wheel ณ ตำแหน่งที่สัมผัสกับพื้น

หากพิจารณารูปด้านบนจะพบว่า จุดที่ขอบ (rim) ของ wheel คือจุด C (θ=0 rad) และเมื่อ wheel หมุนไปได้การกระจัดเชิงมุม θ (วัดเทียบกับแนวดิ่งดังรูป) และจะพบว่าจุด C เปลี่ยนไปเป็น C′$_s$ และจะได้การกระจัดเชิงเส้นของจุด center O เป็นระยะ s (ระยะ O - O′) **ดังนั้น** การคำนวณความเร่งเมื่อ wheel หมุนไป θ จะมีทั้งความเร่งในทิศทาง x และทิศทาง y ซึ่งจะต้องเขียนความสัมพันธ์ การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง และหากต้องการหาค่าต่างๆ ที่จุดสัมผัสพื้นก็แทนค่า θ=0 rad

ความสัมพันธ์การกระจัด

$$\textit{Displacement:}\quad x = s - r\sin\theta \quad ; \quad y = r - r\cos\theta \quad \rightarrow (4)$$

ความสัมพันธ์ความเร็ว

$$\begin{aligned}
\textit{Velocity:}\ \frac{d(4)}{dt} \quad &\Rightarrow \dot{x} = \dot{s} - r\cos(\theta)\dot{\theta} \quad ; \quad \dot{y} = 0 + r\sin(\theta)\dot{\theta} \\
&\Rightarrow \dot{x} = v_0 - r\cos(\theta)\omega \quad ; \quad \dot{y} = r\sin(\theta)\omega \\
&\Rightarrow \dot{x} = v_0 - r\cos(\theta)\left(\frac{v_0}{r}\right) \quad ; \quad \dot{y} = r\sin(\theta)\left(\frac{v_0}{r}\right) \\
\therefore \quad &\Rightarrow \dot{x} = v_0(1-\cos\theta) \quad ; \quad \dot{y} = v_0\sin\theta \quad \rightarrow (5)
\end{aligned}$$

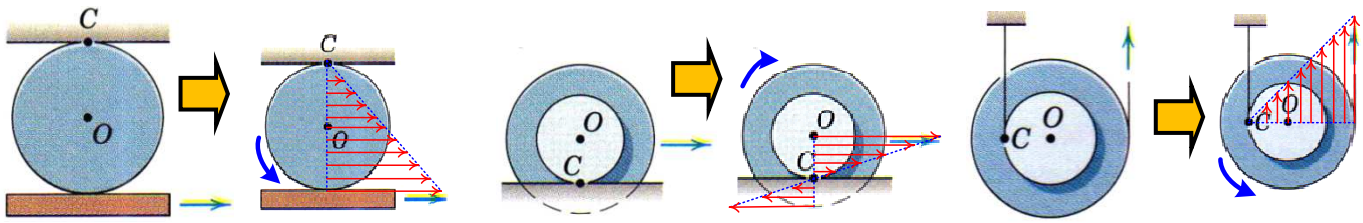
ความสัมพันธ์ความเร่ง

$$\begin{aligned}
\textit{Acceleration:}\ \frac{d(5)}{dt} \quad &\Rightarrow \ddot{x} = \dot{v}_0(1-\cos\theta) + v_0\left[\sin\theta\left(\dot{\theta}\right)\right] \quad ; \quad \dot{y} = \dot{v}_0\sin\theta + v_0\left[\cos\theta\left(\dot{\theta}\right)\right] \\
&\Rightarrow \ddot{x} = a_0(1-\cos\theta) + v_0\omega\sin\theta \quad ; \quad \dot{y} = a_0\sin\theta + v_0\omega\cos\theta \\
&\Rightarrow \ddot{x} = a_0(1-\cos\theta) + v_0\left(\frac{v_0}{r}\right)\sin\theta \quad ; \quad \dot{y} = a_0\sin\theta + v_0\left(\frac{v_0}{r}\right)\cos\theta \\
\therefore \quad &\Rightarrow \ddot{x} = a_0(1-\cos\theta) + \left(\frac{v_0^2}{r}\right)\sin\theta \quad ; \quad \dot{y} = a_0\sin\theta + \left(\frac{v_0^2}{r}\right)\cos\theta \quad (6)
\end{aligned}$$

ดังนั้นที่จุดสัมผัสพื้น (θ=0 rad) จะมีความเร่ง และความเร็ว คือ

$$\begin{aligned}
&\textit{Acceleration:} \quad \Rightarrow \ddot{x} = 0 \ ; \ \ddot{y} = \frac{v_0^2}{r} \quad \underline{\underline{\textit{Ans}}} \\
&\textit{Velocity:} \quad \Rightarrow \dot{x} = 0 \ ; \ \dot{y} = 0
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต: ณ จุดสัมผัส ความเร็วและความเร่งเชิงเส้นของ wheel จะเท่ากับความเร็วและความเร่งเชิงเส้นของพื้น กรณีต่างๆ ของปัญหาในลักษณะเดียวกันแสดงดังรูปด้านล่าง ที่แสดงลักษณะการหมุนและการกระจายตัวของความเร็ว

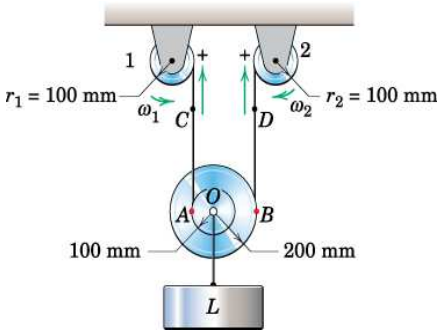


Sample Problem 5/5

The load L is being hoisted by the pulley and cable arrangement shown. Each cable is wrapped securely around its respective pulley so it does not slip. The two pulleys to which L is attached are fastened together to form a single rigid body. Calculate the velocity and acceleration of the load L and the corresponding angular velocity ω and angular acceleration α of the double pulley under the following conditions:

Case (a) Pulley 1: $\omega_1 = \dot{\omega}_1 = 0$ (pulley at rest)
Pulley 2: $\omega_2 = 2$ rad/s, $\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = -3$ rad/s^2

Case (b) Pulley 1: $\omega_1 = 1$ rad/s, $\alpha_1 = \dot{\omega}_1 = 4$ rad/s^2
Pulley 2: $\omega_2 = 2$ rad/s, $\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = -2$ rad/s^2



โจทย์ถามหา Double pulley หา ω_o, α_o และ load L หา v_o, a_o ใน Case (a), และ Case (b)

วิธีทำ จากตัวอย่างข้อที่ 5/4 การเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสของ double pulley ณ จุดสัมผัสกับเส้นเชือกที่ตำแหน่ง A และ B ความเร็วและความเร่ง นี้ จะเท่ากันกับ ความเร็วและความเร่งเชิงเส้นของเชือก C และ D โดยจะสัมพันธ์กับการหมุนของ Pulley 1 และ Pulley 2 **ดังนั้น**การเคลื่อนเชิงมุมของ double pulley สามารถพิจารณาได้จากการกระจายตัวของการเคลื่อนที่เชิงเส้น (ความเร็ว และความเร่ง) ดังรูปด้านล่าง

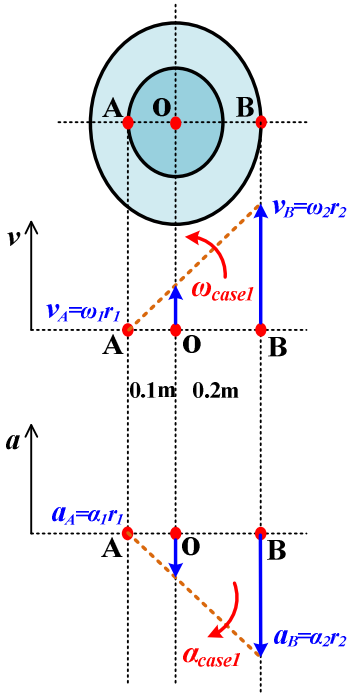


Fig: Case A

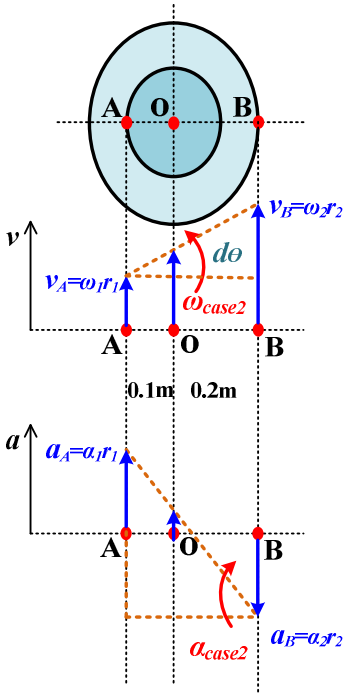


Fig: Case B

จากรูปจะพบว่าความแตกต่างของความเร็วและความเร่งเชิงเส้นระหว่างจุด A และจุด B จะส่งผลให้ double pulley เคลื่อนที่ขึ้นแบบหมุนด้วยความเร็วและความเร่งเชิงมุม โดยทิศทางการเคลื่อนที่แบบหมุน (ความเร็ว และความเร่งเชิงมุม) จะไปตามทิศของความเร็วหรือความเร่งเชิงเส้นที่สูงกว่า

Case: A พิจารณา Fig: Case A

$$\vec{\omega}_{case1} = \frac{v_B - v_A}{r_{AB}} = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_{AB}}$$
$$= \frac{2(0.1) - 0}{0.3} = 0.667\,rad/s\,(CCW)\ \underline{Ans}$$

$$\vec{\alpha}_{case1} = \frac{a_B - a_A}{r_{AB}} = \frac{\alpha_2 r_2 - \alpha_1 r_1}{r_{AB}}$$
$$= \frac{3(0.1) - 0}{0.3} = 0.1 rad/s^2\,(CW)\ \underline{Ans}$$

$$\vec{v}_o = \vec{v}_A + \omega_{case1} r_{AO} = 0 + 0.667(0.1) = 0.0667 m/s\,(up)\ \underline{Ans}$$

$$\vec{a}_o = \vec{a}_A + \alpha_{case1} r_{AO} = 0 + 0.1(0.1) = 0.01 m/s^2\,(down)\ \underline{Ans}$$

Case: B พิจารณา Fig: Case B

$$\vec{\omega}_{case2} = \frac{v_B - v_A}{r_{AB}} = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_{AB}}$$
$$= \frac{2(0.1) - 1(0.1)}{0.3} = 0.333 rad/s\,(CCW)\ \underline{Ans}$$

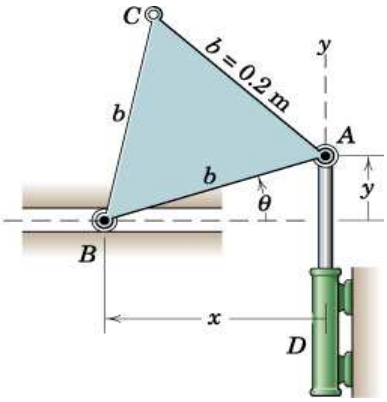
$$\vec{\alpha}_{case2} = \frac{a_A - a_B}{r_{AB}} = \frac{\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2}{r_{AB}}$$
$$= \frac{4(0.1) - (-2)(0.1)}{0.3} = 2 rad/s^2\,(CW)\ \underline{Ans}$$

$$\vec{v}_o = \vec{v}_A + \omega_{case2} r_{AO} = 0.1 + 0.333(0.1) = 0.133 m/s\,(up)\ \underline{Ans}$$

$$\vec{a}_o = \vec{a}_A - \alpha_{case2} r_{AO} = 0.4 - 2(0.1) = 0.2 m/s^2\,(up)\ \underline{Ans}$$

Sample Problem 5/6

Motion of the equilateral triangular plate *ABC* in its plane is controlled by the hydraulic cylinder *D*. If the piston rod in the cylinder is moving upward at the constant rate of 0.3 m/s during an interval of its motion, calculate for the instant when $\theta = 30°$ the velocity and acceleration of the center of the roller *B* in the horizontal guide and the angular velocity and angular acceleration of edge *CB*.



โจทย์ถามหา เมื่อ θ=30°, Roller B หา $\boldsymbol{v_B}, \boldsymbol{a_B}$ และ edge CB หา $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}$

วิธีทำ เนื่องจาก Plate ABC เป็น rigid body ดังนั้นการเคลื่อนที่เชิงมุมของทั้ง plat จะเท่ากันทั้งหมด นั้นคือทุกเส้นขอบของ plate จะเท่ากัน คือ $\boldsymbol{\omega_{AB} = \omega_{BC} = \omega_{AC} = \omega}$ และ $\boldsymbol{\alpha_{AB} = \alpha_{BC} = \alpha_{AC} = \alpha}$ ซึ่งการวิเคราะห์กระทำได้โดยหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่เชิงมุมกับการเคลื่อนที่เชิงเส้นในแนวแกน x และ y

กำหนดทิศการเคลื่อนที่:

$$+x \equiv \leftarrow \quad ; \quad +y \equiv \uparrow \quad ; \quad +\theta \equiv CCW$$

ความสัมพันธ์การกระจัด:

$$\textit{Displacement:} \quad x = b\cos\theta \quad ; \quad y = b\sin\theta \quad \rightarrow (1)$$

ความสัมพันธ์ความเร็ว

$$\textit{Velocity:}\ \frac{d(1)}{dt} \Rightarrow \dot{x} = -b\sin(\theta)\dot{\theta} \quad ; \quad \dot{y} = b\cos(\theta)\dot{\theta}$$
$$\Rightarrow v_B = -b\sin(\theta)\omega \quad ; \quad v_A = b\cos(\theta)\omega \quad \rightarrow (2)$$

ความสัมพันธ์ความเร่ง

$$\textit{Acceleration:}\ \frac{d(2)}{dt} \Rightarrow \ddot{x} = -b\left[\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)\ddot{\theta}\right] \ ; \ \ddot{y} = b\left[-\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + \cos(\theta)\ddot{\theta}\right]$$
$$\Rightarrow a_B = -b\left[\cos(\theta)\omega^2 + \sin(\theta)\alpha\right] \ ; \ a_A = b\left[-\sin(\theta)\omega^2 + \cos(\theta)\alpha\right]$$
$$v_A = const. \ \therefore \ a_A = 0 \Rightarrow a_B = -b\left[\cos(\theta)\omega^2 + \sin(\theta)\alpha\right] \ ; \ 0 = b\left[-\sin(\theta)\omega^2 + \cos(\theta)\alpha\right] \rightarrow (3)$$

ดังนั้น เมื่อ θ=30° และ $v_A = 0.3m/s\,(up) = conts.$ แทนค่าใน (2) และ (3) จะได้

1) ความเร็วเชิงมุมและความเร็วเชิงเส้น: จาก (2)

$$v_A = b\cos(\theta)\omega$$
$$\therefore \ \omega = \frac{v_A}{b\cos\theta} = \frac{0.3}{0.2\cos 30^\circ}$$
$$\omega = 1.732\,rad/s\,(CCW) \quad \underline{Ans}$$

$$v_B = -b\sin(\theta)\omega = -0.2\sin(30^\circ)(1.732)$$
$$v_B = -0.1732\,m/s = 0.1732m/s(\rightarrow) \quad \underline{Ans}$$

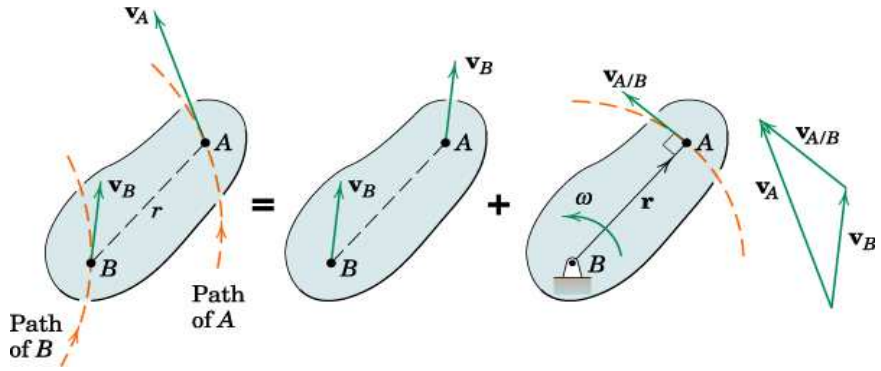
2) ความเร่งเชิงมุมและความเร่งเชิงเส้น: จาก (3)

$$0 = b\left[-\sin(\theta)\omega^2 + \cos(\theta)\alpha\right]$$
$$\therefore \ \alpha = \frac{\sin(\theta)\omega^2}{\cos(\theta)} = \omega^2\tan\theta = 1.732^2\tan 30^\circ$$
$$\alpha = 1.732\,rad/s\,(CCW) \quad \underline{Ans}$$

$$a_B = -b\left[\cos(\theta)\omega^2 + \sin(\theta)\alpha\right]$$
$$= -0.2\left[\cos(30^\circ)1.732^2 + \sin(30^\circ)1.732\right]$$
$$\therefore \ a_B = -0.963m/s^2 = 0.963m/s^2\ (\rightarrow) \quad \underline{Ans}$$

5.4 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์ (Relative Motion)

5.4a) ความเร็วสัมพัทธ์เนื่องจากการหมุน (Relative Velocity Due to Rotation)



สมการความสัมพันธ์ ความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เทียบกับจุด B

1) **ความเร็วจุด A เมื่อเทียบกับจุด B**

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

เมื่อ $\vec{V}_{A/B}$: ความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เทียบต่อจุด B จากการหมุนของวัตถุเกร็งรอบจุด B ดังรูป

2) **ความเร็วสัมพัทธ์ $\vec{V}_{A/B}$ ที่เกิดจากการหมุนรอบจุด B** คือ (ระยะห่างระหว่าง $B-A=\vec{r}_{BA}$)

ความสัมพันธ์เชิงขนาด (Scalar relations)

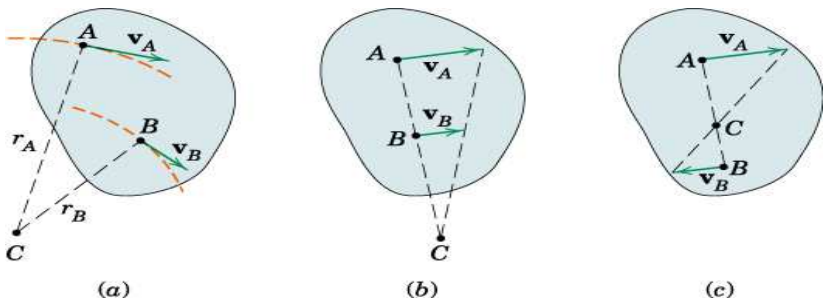
$$v_{A/B} = r_{BA}\omega$$

โดย ω ความเร็วเชิงมุมของเส้น AB ดังรูป

ความสัมพันธ์เชิงเวกเตอร์ (Vector relations)

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} = \omega r_{BA}\,\hat{e}_t$$

5.4b) จุดหมุนชั่วขณะ (Instantaneous Center of Zero Velocity)



จากรูป ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง ที่จุด C มีความเร็วเป็นศูนย์ จะเรียกจุด C ว่าเป็น "จุดหมุนช่วงขณะ"

ซึ่งการหมุนรอบจุด C นี้ มีความเร็วเชิงมุม ω ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์ความเร็วจุด A และจุด B คือ

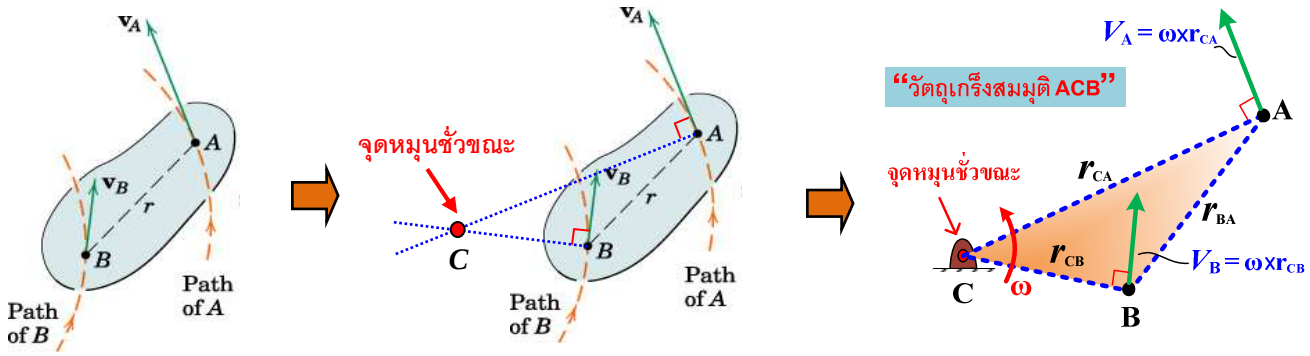
$$\left.\begin{aligned} v_A &= \omega r_A \\ v_B &= \omega r_B \end{aligned}\right\} \therefore \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_B}$$

การวิเคราะห์แบบจุดหมุนชั่วขณะ

พิจารณาวัตถุเกร็งในรูปด้านล่าง หากทราบความเร็วที่จุด B (ทั้งขนาดและทิศทาง) และต้องการทราบความเร็วของจุด A (ทราบเฉพาะทิศทาง โดยสัมผัสกับ Path line) สามารถกระทำได้ตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1: หาจุดหมุนชั่วขณะ (จุด C) และวัตถุเกร็งสมมุติ

- ลากเส้นตรงผ่านจุด B และตั้งฉากกับความเร็ว $\vec{V}_B$ ดังรูป
- ลากเส้นตรงผ่านจุด A และตั้งฉากกับ Path line ของ จุด A (ทิศทาง $\vec{V}_A$) ดังรูป
- จุดตัดระหว่าง 2 เส้น คือจุด C ซึ่งจะเป็น "จุดหมุนช่วงขณะ" และจะได้ "วัตถุเกร็งสมมุติ ACB" โดยจะหมุนด้วยความเร็งเชิงมุม ω รอบจุด C ดังรูป



ขั้นตอนที่ 2: คำนวณความเร็ว ณ จุดต่าง ๆ บนวัตถุเกร็งสมมุติ

ความเร็วของจุด A

$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA}$ ขนาด $v_A = \omega r_{CA}$

เมื่อ $\vec{\omega} = \frac{v_B}{r_{CB}}\hat{k}$ โดยที่ทราบค่าความเร็ว v_B

และความเร็วที่จุด P ใดๆ บนวัตถุเกร็งสมมุติ สามารถคำนวณได้เช่นเดียวกัน คือ $\vec{V}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}$ โดยที่ $\vec{r}_{CP}$ คือเวกเตอร์การกระจัดจากจุด C ไปยังจุด P ใดๆ

เปรียบเทียบ: ความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เทียบกับจุด B

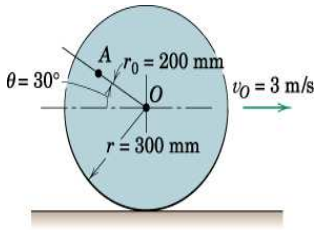
$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA} \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CB} + \vec{r}_{BA}) \\ &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CB}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) \\ \vec{V}_A &= \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}\end{aligned}$$

ซึ่งจะพบผลลัพธ์ที่ได้นั้น เท่ากันกับวิธีความเร็วสัมพัทธ์

1 ตัวอย่าง (ความเร็วสัมพัทธ์)

Sample Problem 5/7

The wheel of radius $r = 300$ mm rolls to the right without slipping and has a velocity $v_O = 3$ m/s of its center O. Calculate the velocity of point A on the wheel for the instant represented.



โจทย์กำหนด จุด Center O: มีการเคลื่อนที่เชิงเส้น คือ $v_O = 3\,m/s$

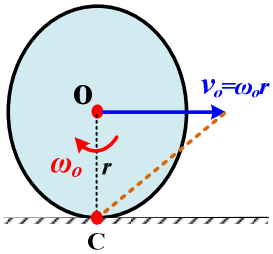
โจทย์ถามหา a) หาความเร็วของจุด A: $\vec{V}_A = ?$

วิธีทำ

สร้างสมการที่มีตัวแปรโจทย์ถามหา V_A นั้นคือ สมการความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เทียบต่อจุด O

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{A/O} = \vec{V}_O + \vec{\omega}_O \times \vec{r}_{OA} \rightarrow (1)$$

จาก (1) ตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า คือ $\vec{\omega}_O$ ซึ่งสามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกันกับตัวอย่างที่ 5/4



จากรูป จะได้

$$\vec{\omega}_O = \frac{v_o}{r} = \frac{3}{0.3}$$
$$= 10\,rad/s\,(CW) = -10\vec{k}\ rad/s$$

แทนค่าที่ทราบใน (1) จะได้

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega}_O \times \vec{r}_{OA}$$
$$= 3\vec{i} + \left(-10\vec{k}\right) \times 0.2\left(-\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j}\right)$$

$$\vec{V}_A = 3\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ -0.1732 & 0.1 & 0 \end{vmatrix}$$

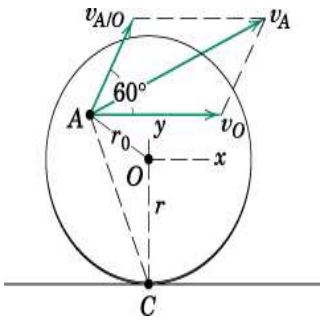
$$\vec{V}_A = 3\vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 0.1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -0.1732 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0.1732 & 0.1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{V}_A = 3\vec{i} + 1\vec{i} - (-1.732)\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

ดังนั้น

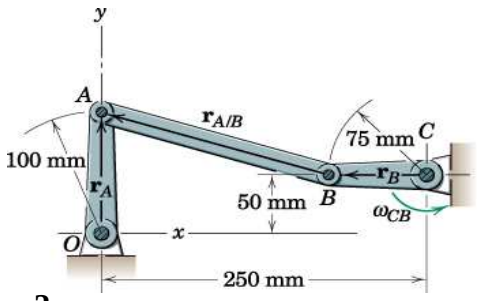
$$\vec{V}_A = 4\vec{i} + 1.732\vec{j}\ m/s \quad \underline{Ans}$$

$$\left|\vec{V}_A\right| = \sqrt{4^2 + 1.732^2} = 4.36\,m/s \quad \underline{Ans}$$



Sample Problem 5/8

Crank CB oscillates about C through a limited arc, causing crank OA to oscillate about O. When the linkage passes the position shown with CB horizontal and OA vertical, the angular velocity of CB is 2 rad/s counterclockwise. For this instant, determine the angular velocities of OA and AB.



โจทย์ถามหา หาความเร็วเชิงมุมของ Crank AB: $\omega_{AB}=?$ และ Crank OA: $\omega_{OA}=?$

วิธีทำ

สร้างสมการที่มีตัวแปรโจทย์ถามหา $\vec{\omega}_{AB}, \vec{\omega}_{OA}$ นั้นคือสมการความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เทียบต่อจุด B

$$\vec{V}_A=\vec{V}_B+\vec{V}_{A/B}=\vec{V}_B+\vec{\omega}_{BA}\times\vec{r}_{BA}\rightarrow(1)$$

โดยที่

$$\vec{V}_A=\vec{\omega}_{OA}\times\vec{r}_{OA}\rightarrow(2)$$

และ

$$\vec{V}_B=\vec{\omega}_{CB}\times\vec{r}_{CB}=(2\vec{k})\times(-0.075\vec{i})$$
$$=-0.15\,\vec{j}\ m/s$$

กำหนดให้ทิศทาง $\vec{\omega}_{AB}, \vec{\omega}_{OA}$ ในเบื้องต้น เป็น CCW หรือ $+\vec{k}$ แทนค่าที่ทราบทั้งหมดใน (1) จะได้

$$\vec{V}_A=\vec{V}_B+\vec{\omega}_{BA}\times\vec{r}_{BA}$$
$$\vec{\omega}_{OA}\times\vec{r}_{OA}=\vec{V}_B+\vec{\omega}_{BA}\times\vec{r}_{BA}$$
$$\left(\omega_{OA}\vec{k}\right)\times\left(0.1\vec{j}\right)=-0.15\vec{j}+\left(\omega_{BA}\vec{k}\right)\times\left(-0.175\vec{i}+0.05\vec{j}\right)$$

จะได้

$$-0.1\omega_{OA}\vec{i}=-0.15\vec{j}+\left[-0.175\omega_{BA}\vec{j}-0.05\omega_{BA}\vec{i}\right]$$

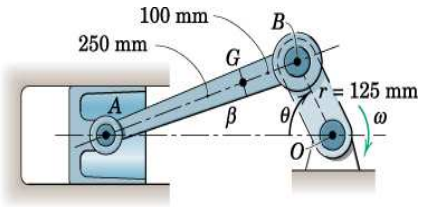
แยก Vectors component $\vec{i},\vec{j}$ จะได้

$$\text{component }\vec{j}:\ 0=-0.15-0.175\omega_{BA}$$
$$\therefore\quad \omega_{BA}=\frac{-0.15}{0.175}=-0.8571\ rad/s$$
$$\vec{\omega}_{BA}=0.8571\ rad/s\ (CW)\ \underline{Ans}$$

$$\text{component }\vec{i}:\ -0.1\omega_{OA}=-0.05\omega_{BA}$$
$$\therefore\quad \omega_{OA}=\frac{0.05\omega_{BA}}{0.1}=\frac{0.05(-0.8571)}{0.1}$$
$$=-0.4286\,rad/s$$
$$\vec{\omega}_{OA}=0.4286\ rad/s\ (CW)\ \underline{Ans}$$

Sample Problem 5/9

The common configuration of a reciprocating engine is that of the slider-crank mechanism shown. If the crank OB has a clockwise rotational speed of 1500 rev/min, determine for the position where $\theta = 60°$ the velocity of the piston A, the velocity of point G on the connecting rod, and the angular velocity of the connecting rod.



โจทย์ถามหา a) ความเร็วของ piston A: $\vec{V}_A = ?$

b) ความเร็วของจุด G: $\vec{V}_A = ?$ และความเร็วเชิงมุมของ connecting rod: $\omega_{AB} = ?$

วิธีทำ

a) ความเร็วของ piston A: $\vec{V}_A = ?$

สร้างสมการที่มีตัวแปรโจทย์ถามหา $\vec{V}_A$ นั้นคือสมการความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เทียบต่อจุด B

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{BA} \rightarrow (1)$$

โดยที่

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB}$$
$$= \left(-\frac{2\pi(1500)}{60}\vec{k}\right) \times 0.125(-\cos 60^o \vec{i} + \sin 60^o \vec{j})$$

$$\vec{V}_B = 9.8175\,\vec{j} + 17.004\,\vec{i}\ m/s$$

ในเบื้องต้นนี้ กำหนดให้ทิศทาง $\vec{\omega}_{AB}$ เป็น CCW $+\vec{k}$ และกำหนด $\vec{V}_A = v_A\vec{i}\ (\rightarrow)$ ดังนั้นแทนค่าที่ทั้งหมดใน (1) จะได้

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{BA}$$
$$v_A\vec{i} = \left[\, 9.8175\,\vec{j} + 17.004\,\vec{i}\,\right] + \left(\omega_{BA}\vec{k}\right) \times 0.35\left(-\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}\right)$$

$$\therefore\ v_A\vec{i} = \left[\, 9.8175\,\vec{j} + 17.004\,\vec{i}\,\right] + 0.35\,\omega_{BA}\left(-\cos\beta\,\vec{j} + \sin\beta\,\vec{i}\right) \quad (2)$$

จาก (2) ยังไม่ทราบค่า β ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากรูปจะพบว่า

$$\frac{\sin\beta}{r_{OB}} = \frac{\sin\theta}{r_{BA}} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{r_{OB}}{r_{BA}}\sin\theta\right)$$
$$\Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{0.125}{0.35}\sin 60^\circ\right) = 18.02^\circ$$

ดังนั้น แยก Vectors component $\vec{i}, \vec{j}$ ของ (2) จะได้

$$\text{component } \vec{j}: 0 = 9.8175 - 0.35\,\omega_{BA}$$
$$\therefore\ \omega_{BA} = \frac{9.8175}{0.35\cos\beta} = \frac{9.8175}{0.35\cos 18.02^\circ}$$
$$\vec{\omega}_{BA} = 29.5\ rad/s\ (CW)\ \underline{Ans}$$

$$\text{component } \vec{i}: v_A = 17.004 + 0.35\,\omega_{BA}\sin\beta$$
$$= 17.004 + 0.35(29.5)\sin 18.02^\circ$$
$$\therefore\ = 20.2\ m/s$$
$$\therefore\ \vec{V}_A = 20.2\vec{i}\ m/s\ (\rightarrow)\ \underline{Ans}$$

b)ความเร็วของ จุด G : $\vec{V}_G = ?$

สร้างสมการที่มีตัวแปรโจทย์ถามหา $\vec{V}_G$ นั้นคือสมการความเร็วสัมพัทธ์ของจุด G เทียบต่อจุด B

$$\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{V}_{G/B} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BG} \times \vec{r}_{BG} \rightarrow (3)$$

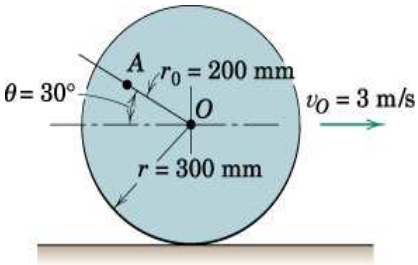
แทนค่าที่ทราบ $\vec{V}_B = 9.8175\,\vec{j} + 17.004\,\vec{i}\ m/s$ และ $\vec{\omega}_{BG} = \vec{\omega}_{BA} = 29.5\vec{k}\ rad/s$ (เพราะเป็น จุด ที่อยู่บน rigid body: connecting rod BA) ลงใน (3) จะได้

$$\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BG} \times \vec{r}_{BG}$$
$$= \left(9.8175\,\vec{j} + 17.004\,\vec{i}\right) + (29.5\vec{k}) \times 0.1\left(-\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}\right)$$
$$= \left(9.8175\,\vec{j} + 17.004\,\vec{i}\right) + 29.5(0.1)\left(-\cos 18.02^\circ\,\vec{j} + \sin 18.02^\circ\,\vec{i}\right)$$
$$\therefore\ \vec{V}_G = 17.92\vec{i} + 7.012\vec{j}\ m/s;$$
$$\left|\vec{V}_G\right| = 19.24\ m/s\ \underline{Ans}$$

2 ตัวอย่าง (จุดหมุนชั่วขณะ)

Sample Problem 5/11

The wheel of Sample Problem 5/7, shown again here, rolls to the right without slipping, with its center O having a velocity $v_O = 3$ m/s. Locate the instantaneous center of zero velocity and use it to find the velocity of point A for the position indicated.

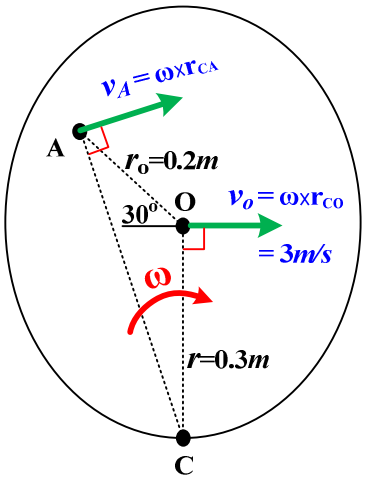


โจทย์กำหนด จุด Center O: มีการเคลื่อนที่เชิงเส้น คือ $\vec{v}_O = 3m/s$

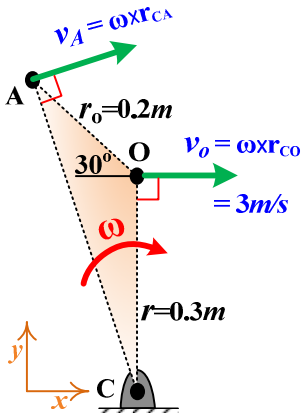
โจทย์ถามหา a) หาความเร็วของจุด A: $\vec{v}_A = ?$ (วิเคราะห์แบบจุดหมุนชั่วขณะ)

วิธีทำ

หากพิจารณาจุดหมุนชั่วขณะของความเร็ว $\vec{v}_O$ จะพบว่าเป็นจะอยู่ที่จุดสัมผัสกับพื้น (จุด C) ดังรูป



รูปด้านบนแสดงเวกเตอร์ความเร็วของจุด O และจุด A ที่จุดหมุนชั่วขณะคือจุด C ซึ่ง*ทิศทางของเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}_O$ จะต้องตั้งฉากกับเวกเตอร์การกระจัด $\vec{r}_{CO}$* และ*เช่นเดียวกันกับ* $\vec{v}_A \perp \vec{r}_{CA}$ จากเหตุผลข้างต้น เรา*สามารถพิจารณาได้ว่าสามเหลี่ยม CAO เป็น**วัตถุเกร็งสมมุติ*** ที่หมุนรอบจุด C ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ดังรูปด้านล่าง



ดังนั้นหากทราบความเร็วเชิงมุมของวัตถุเกร็งสมมุติ CAO ($\vec{\omega}$) ก็จะสามารถคำนวณหาความเร็วของทุกๆ จุดบนวัตถุเกร็งได้จาก $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ แต่จากรูปเราทราบความเร็ว $\vec{v}_o = 3\vec{i}\ m/s$ ดังนั้นจะเราสามารถคำนวณความเร็วเชิงมุมได้ คือ

$$\vec{v}_o = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CO}$$
$$3\vec{i} = \vec{\omega} \times 0.3\vec{j} \Rightarrow \therefore \vec{\omega} = -10\vec{k}\ rad/s$$
$$\vec{\omega} = 10\ rad/s\,(CW)$$

ดังนั้นจะได้ความเร็ว $\vec{v}_A$ ณ ตำแหน่ง A คือ

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA}$$
$$\vec{v}_A = -10\vec{k} \times \left[0.3\vec{j} + 0.2\left(-\cos 30^o\,\vec{i} + \sin 30^o\,\vec{j}\right)\right]$$
$$\vec{v}_A = 4\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}\ m/s$$

หรือ $|\vec{v}_A| = \sqrt{19} = 4.36\,m/s \angle 23.41^o$ *Ans*

วิเคราะห์แบบ Scalar

จากรูป จะได้ความเร็วเชิงมุม คือ

$$v_o = \omega(r_{CO})$$
$$3 = \omega(0.3) \Rightarrow \therefore \vec{\omega} = 10\ rad/s\,(CW)$$

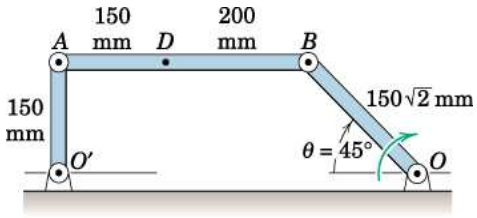
ซึ่งทิศทางของ $\vec{\omega}\ (CW)$ พิจารณาได้จากหลักการของ*กฎมือขวา* หรือ***พิจารณาจากรูปจะพบว่า $\vec{v}_o$ ในทิศทางที่แสดงจะเหนี่ยวนำให้วัตถุเกร็งสมมุติ CAO หมุนรอบจุด C ในทิศทาง CW*** ดังรูป

และจะได้ความเร็ว $\vec{v}_A$ ณ ตำแหน่ง A คือ

$$v_o = \omega(r_{CA})$$
$$v_o = (10)\sqrt{\left\{0.3^2 + 0.2^2 - 2(0.3)(0.2)\cos\left(30^o + 90^o\right)\right\}}$$
$$\therefore v_o = 4.36\,m/s$$

Sample Problem 5/12

Arm *OB* of the linkage has a clockwise angular velocity of 10 rad/s in the position shown where $\theta = 45°$. Determine the velocity of *A*, the velocity of *D*, and the angular velocity of link *AB* for the position shown.



โจทย์ถามหา ความเร็วของจุด A และ D $(\vec{v}_A, \vec{v}_D = ?)$

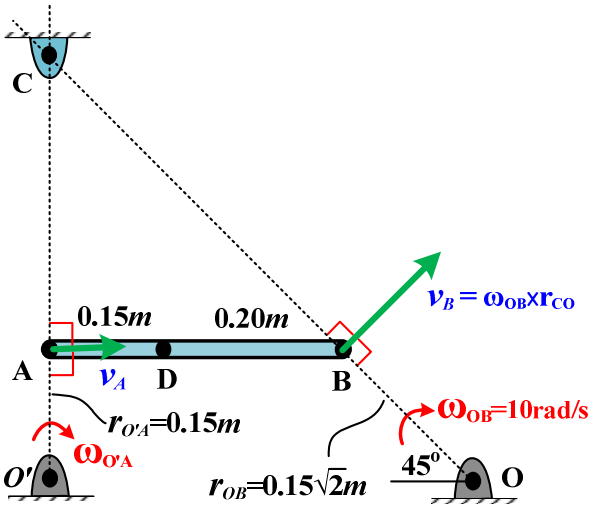
ความเร็วเชิงมุมของ Link AB: $\vec{\omega}_{AB} = ?$

เพิ่มเติม(แถม) คำนวณความเร็วเชิงมุมของ link O'A: $\vec{\omega}_{O'A} = ?$

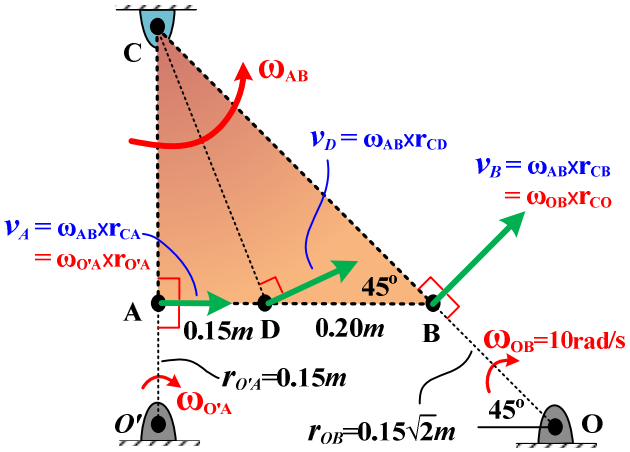
วิธีทำ

สิ่งที่ต้องการทราบคือผลลัพธ์การเคลื่อนที่บน link AB ได้แก่ $\vec{\omega}_{AB}, \vec{v}_A, \vec{v}_D$ ดังนั้น หากพิจารณาจุดหมุนชั่วขณะของ link AB จะต้องทราบทิศทางความเร็วของจุดต่างๆ บน link AB อย่างน้อย 2 จุด แล้วลากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับความเร็วดังกล่าว จุดตัดกันของเส้นตรงจะได้เป็นจุดหมุนชั่วขณะ (จุด C) และจะได้วัตถุเกร็ง-สมมุติที่หมุนรอบจุด C

ทิศทางความเร็วบน link AB ที่ทราบคือ $\vec{v}_A \perp \vec{r}_{O'A}$ และ $\vec{v}_B \perp \vec{r}_{OB}$ (ทราบขนาด $v_B = \omega_{OB} r_{OB}$) ดังรูป



จากรูปด้านบน จะพบว่า link AB มีจุดหมุนชั่วขณะที่จุด C ซึ่งจะได้วัตถุเกร็งสมมุติ CAB และผลจากความเร็ว $\vec{v}_B$ จะเหนี่ยวนำให้วัตถุเกร็งสมมุติ CAB หมุนรอบจุด C ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}_{AB}$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (CCW) ดังรูปถัดไป



จากรูป ระยะการกระจัดจากจุด C ถึงตำแหน่งต่างๆ คือ

$$\Rightarrow \frac{r_{CB}}{\sin 90^\circ} = \frac{0.35}{\sin 45^\circ} \Rightarrow r_{CB} = 0.35\sqrt{2}\ m.$$

$$\Rightarrow \frac{r_{CA}}{\sin 45^\circ} = \frac{0.35}{\sin 45^\circ} \Rightarrow r_{CA} = 0.35\,m.$$

$$\Rightarrow r_{CD} = \sqrt{r_{CA}^2 + 0.15^2} \Rightarrow r_{CD} = 0.381m.$$

ซึ่งจากรูปความเร็วที่จุด B, A, D คือ

$$v_B = \omega_{AB} r_{CB} = \omega_{OB} r_{CO} \Rightarrow \omega_{AB} = \omega_{OB}\left(\frac{r_{CO}}{r_{CB}}\right)$$

$$\therefore \omega_{AB} = 10\left(\frac{0.15\sqrt{2}}{0.35\sqrt{2}}\right) = 4.29\,rad/s\,(CCW)\ \underline{Ans}$$

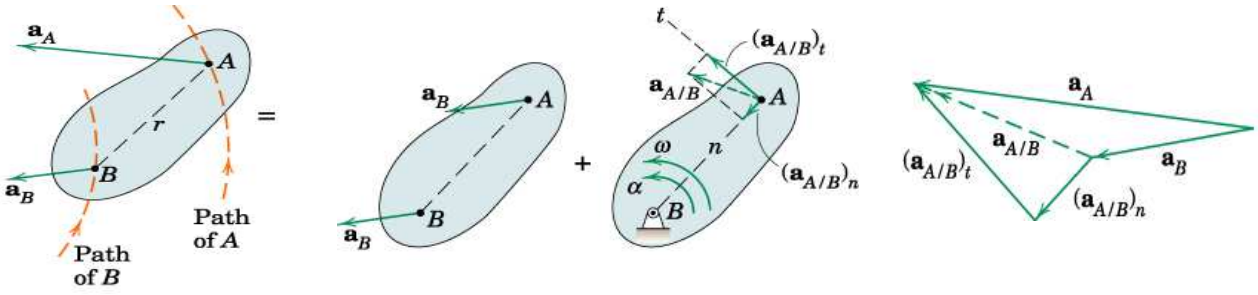
$$v_D = \omega_{AB} r_{CD} = 4.29(0.381) = 1.632\,m/s\ \underline{Ans}$$

$$v_A = \omega_{AB} r_{CA} = 4.29(0.35) = 1.50\,m/s\ \underline{Ans}$$

$$v_A = \omega_{O'A} r_{O'A} \Rightarrow \omega_{O'A} = \frac{v_A}{r_{O'A}}$$

$$\therefore \omega_{O'A} = \frac{1.50}{0.15} = 10\,rad/s\,(CW)\ \underline{Ans}$$

5.4c) ความเร่งสัมพัทธ์ (Relative Acceleration)



<u>สมการความสัมพันธ์ ความเร่งสัมพัทธ์ของจุด A กับจุด B</u>

1) ความเร่งจุด A เมื่อเทียบกับจุด B

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

เมื่อ $\vec{a}_{A/B}$ **:** ความเร่งสัมพัทธ์ของจุด A เทียบต่อจุด B จากการหมุนของวัตถุเกร็งรอบจุด B ดังรูป

2) ความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_{A/B}$ ที่เกิดจากการหมุนรอบจุด B คือ *(ระยะห่างระหว่าง B-A = r)*

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

<u>ความสัมพันธ์เชิงขนาด</u> ***(Scalar relations)*** ของความเร่งสัมพัทธ์ในทิศทาง n และ t คือ

$$(a_{A/B})_n = \frac{v_{A/B}^{\ 2}}{r_{BA}} = r_{BA}\omega^2$$

$$(a_{A/B})_t = \dot{v}_{A/B} = r_{BA}\alpha$$

<u>ความสัมพันธ์เชิงเวกเตอร์</u> ***(Vector relations)*** ของความเร่งสัมพัทธ์ในทิศทาง n และ t คือ

$$(\vec{a}_{A/B})_n = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{BA}) = \vec{\omega}\times\vec{V}_{A/B} = -r_{BA}\omega^2\hat{e}_r$$

$$(\vec{a}_{A/B})_t = \vec{\alpha}\times\vec{r}_{BA} = \alpha r_{BA}\hat{e}_t$$

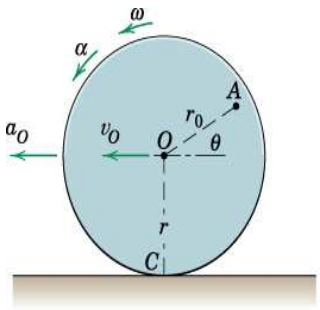
อธิบาย: *การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์ (ความเร็วและความเร่ง) ของจุด A เทียบต่อจุด B ให้เปรียบเสมือนว่าเราเคลื่อนที่ไปพร้อมกับ B แล้วมองไปดู A ซึ่งการเคลื่อนที่ของ A ที่เรามองเห็น มันคือผลต่างระหว่าง A กับ B หรือที่เรียกว่า* ***"ความเร็วหรือความเร่งสัมพัทธ์"*** *นั้นเอง ดังนั้นหากต้องการทราบค่าจริง (ค่าสัมบูรณ์) ของ A ก็เอาผลต่างอันนั้น (ค่าสัมพัทธ์)* ***มาบวก*** *กับการเคลื่อนที่ของ B (ค่าสัมบูรณ์ของ B)*

หมายเหตุ: *เนื่องจากเราอยู่บน B แล้วสังเกตไปที่ A ดังนั้นเวกเตอร์การกระจัดจะต้องเป็น เวกเตอร์จาก B ไป A นั่นคือ* $\vec{r}_{BA}$

3 ตัวอย่าง (ความเร่งสัมพัทธ์)

Sample Problem 5/13

The wheel of radius r rolls to the left without slipping and, at the instant considered, the center O has a velocity $\mathbf{v}_O$ and an acceleration $\mathbf{a}_O$ to the left. Determine the acceleration of points A and C on the wheel for the instant considered.



โจทย์ถามหา ความเร่งของจุด A และ C $(\vec{a}_A, \vec{a}_C = ?)$

วิธีทำ

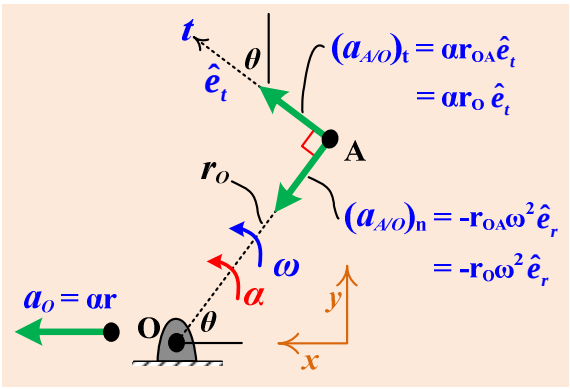
1) ความเร่งของจุด A : $\vec{a}_A = ?$

จากสมการความเร่งสัมพัทธ์จุด A เทียบต่อ B

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O} \rightarrow (1)$$

โดยที่ $\vec{a}_O = a_O\,\vec{i}$

และ $\vec{a}_{A/O} = (a_{A/O})_n\,\hat{e}_n + (a_{A/O})_t\,\hat{e}_t$ ซึ่งพิจารณาได้จากรูปด้านล่าง คือ



จากตัวอย่างที่ 5/4 เราทราบว่า

$$a_O = \alpha r \quad and \quad v_O = \omega r$$

ดังนั้น แทนค่าใน (1) จะได้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O} = \vec{a}_O + \{(\vec{a}_{A/O})_n + (\vec{a}_{A/O})_t\}$$

$$= (\alpha r\,\vec{i}) + \left\{\begin{array}{c} \alpha r_o(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) \\ + \\ r_o\omega^2(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}) \end{array}\right\}$$

$$\vec{a}_A = (\alpha r + (\alpha r_o \sin\theta + r_o\omega^2\cos\theta))\,\vec{i}$$
$$+ (\alpha r_o\cos\theta - r_o\omega^2\sin\theta)\,\vec{j} \quad \underline{Ans}$$

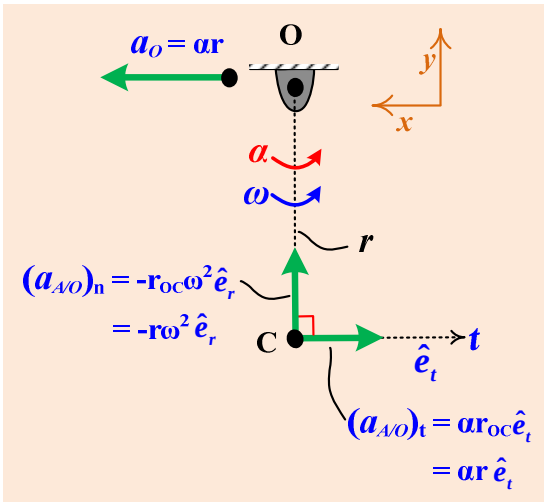
2) ความเร่งของจุด C : $\vec{a}_C = ?$

จากสมการความเร่งสัมพัทธ์จุด A เทียบต่อ B

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{C/O} \rightarrow (2)$$

โดยที่ $\vec{a}_O = a_O\,\vec{i}$

และ $\vec{a}_{C/O} = (a_{C/O})_n\,\hat{e}_n + (a_{C/O})_t\,\hat{e}_t$ ซึ่งพิจารณาได้จากรูปด้านล่าง คือ



จากตัวอย่างที่ 5/4 เราทราบว่า

$$a_O = \alpha r \quad and \quad v_O = \omega r$$

ดังนั้น แทนค่าใน (2) จะได้

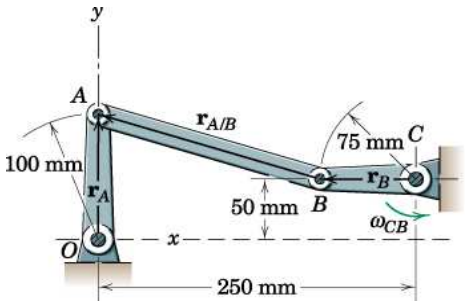
$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{C/O} = \vec{a}_O + \{(\vec{a}_{C/O})_n + (\vec{a}_{C/O})_t\}$$

$$= (\alpha r\,\vec{i}) + \{(r\omega^2\,\vec{j}) + (-\alpha r\,\vec{i})\}$$

$$\vec{a}_A = r\omega^2\,\vec{j} \quad \underline{Ans}$$

Sample Problem 5/14

The linkage of Sample Problem 5/8 is repeated here. Crank *CB* has a constant counterclockwise angular velocity of 2 rad/s in the position shown during a short interval of its motion. Determine the angular acceleration of links *AB* and *OA* for this position. Solve by using vector algebra.



โจทย์ถามหา ความเร่งเชิงมุมของ link AB และ link OA นั้นคือ $\vec{\alpha}_{AB}=?\ ,\ \vec{\alpha}_{OA}=?$

โดยใช้วิธีการวิเคราะห์แบบเวกเตอร์ (Vector algebra)

วิธีทำ

ผลลัพธ์จาก Problem 5/8 ความเร็วเชิงมุมของ link AB และ link OA คือ

$$\vec{\omega}_{AB}=\frac{6}{7}\,rad/s\ (CW)=-\frac{6}{7}\hat{k}\,rad/s$$

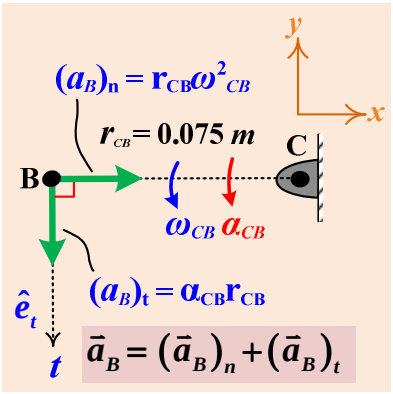
$$\vec{\omega}_{OA}=\frac{3}{7}\,rad/s\ (CW)=-\frac{3}{7}\hat{k}\,rad/s$$

เริ่มต้นด้วยสมการที่มีตัวแปรที่โจทย์ถามหา $\vec{\alpha}_{AB}\ ,\ \vec{\alpha}_{OA}$ ซึ่งพิจาณาได้จากสมการความเร่งสัมพัทธ์จุด A เทียบต่อ B (เหตุผล เพราะทราบความเร่งที่ B)

$$\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{A/B}\rightarrow(1)$$

ซึ่ง $\vec{a}_B$ $\vec{a}_A$ และ $\vec{a}_{A/B}$ พิจารณาได้จากรูปต่อไปนี้

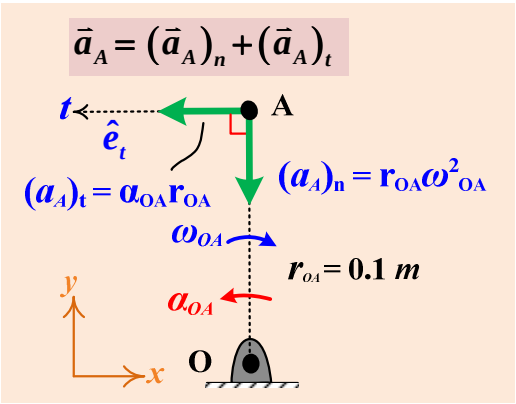
❖ **ความเร่งจุด B**



$$\vec{a}_B=(\vec{a}_B)_n+(\vec{a}_B)_t$$
$$=[\vec{\omega}_{CB}\times(\vec{\omega}_{CB}\times\vec{r}_{CB})]+[\vec{\alpha}_{CB}\times\vec{r}_{CB}]$$
$$=\left[2\vec{k}\times\left(2\vec{k}\times\left(-0.075\vec{i}\right)\right)\right]+0$$

$$\vec{a}_B=0.3\vec{i}\ m/s^2\rightarrow(2)$$

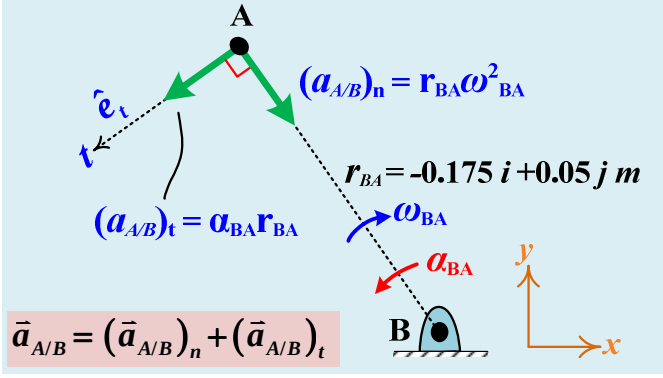
❖ **ความเร่งจุด A : กำหนดทิศ $\vec{\alpha}_{OA}(+\hat{k})$**



$$\vec{a}_A=(\vec{a}_A)_n+(\vec{a}_A)_t$$
$$=[\vec{\omega}_{OA}\times(\vec{\omega}_{OA}\times\vec{r}_{OA})]+[\vec{\alpha}_{OA}\times\vec{r}_{OA}]$$
$$=\left[-\frac{3}{7}\vec{k}\times\left(\left(-\frac{3}{7}\vec{k}\right)\times\left(0.1\vec{j}\right)\right)\right]+\left[\alpha_{OA}\vec{k}\times0.1\vec{j}\right]$$

$$\vec{a}_A=-0.1\alpha_{OA}\vec{i}\ -0.1\left(\frac{3}{7}\right)^2\vec{j}\quad m/s^2\rightarrow(3)$$

❖ **ความเร่งสัมพัทธ์ A/B : กำหนดทิศ $\vec{\alpha}_{AB}(+\hat{k})$**



$$\vec{a}_{A/B} = (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t \quad \rightarrow (4)$$

ซึ่ง

$$(\vec{a}_{A/B})_n = [\vec{\omega}_{BA} \times (\vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{BA})]$$
$$= \left[-\frac{6}{7}\vec{k} \times \left(\left(-\frac{6}{7}\vec{k} \right) \times (-0.175\vec{i} + 0.05\vec{j}) \right) \right]$$

$$(\vec{a}_{A/B})_n = \left(\frac{6}{7}\right)^2 (0.175\vec{i} - 0.05\vec{j}) \quad m/s^2$$

และ

$$(\vec{a}_{A/B})_t = [\vec{\alpha}_{BA} \times \vec{r}_{BA}]$$
$$= \left[\alpha_{BA}\vec{k} \times (-0.175\vec{i} + 0.05\vec{j}) \right]$$
$$= \left[\alpha_{BA} (-0.05\vec{i} - 0.175\,\vec{j}) \right]$$

$$(\vec{a}_{A/B})_t = \left[\alpha_{BA} (-0.05\vec{i} - 0.175\,\vec{j}) \right] \quad m/s^2$$

แทนค่าสมการ (2) (3) (4) ในสมการ (1) แล้วแยก สปส. หน้าเวกเตอร์ $\vec{i}, \vec{j}$ จะได้

$\vec{i}$ –term :

$$-0.1\alpha_{OA} = 0.3 + 0.175\left(\frac{6}{7}\right)^2 - 0.05\alpha_{BA} \quad (*)$$

$\vec{j}$ –term :

$$-0.1\left(\frac{3}{7}\right)^2 = -\left(\frac{6}{7}\right)0.05 - 0.175\alpha_{BA} \quad (**)$$

แก้ระบบสมการ (*) และ (**) จะได้

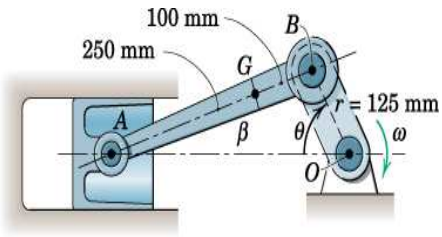
$$\alpha_{BA} = -0.1050 \Rightarrow \alpha_{BA} = 0.1050\ rad/s^2\ (CW)\ \underline{Ans}$$
$$\alpha_{OA} = -4.34 \Rightarrow \alpha_{OA} = 4.34\ rad/s^2\ (CW)\ \underline{Ans}$$

เครื่องหมายลบ (-) แสดงว่าความเร่งเชิงมุมแท้จริง จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางที่เรากำหนด (การเดาตามหลักสากล) ไว้ตอนแรก ซึ่งตอนแรกได้กำหนดเป็น $(+\hat{k})$ หรือ (CCW) ดังนั้น **หมายลบ (-)** คือความเร่งเชิงมุมมีทิศทางเป็น $(-\hat{k})$ หรือ (CW) นั่นเอง

จากการวิเคราะห์ปัญหานี้ จะพบว่าทิศทางของความเร็วเชิงมุม (Angular velocity: $\vec{\omega}$) จะไม่ส่งผลต่อขนาดและทิศทางของความเร่งเชิงเส้น เหตุผลเพราะทิศทางของความเร่งเนื่องจากความเร็วเชิงมุม จะพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางการหมุนในทุกกรณี ($\vec{a}_n = r\omega^2\hat{e}_n$ หรือ $\vec{a}_n = -r\omega^2\hat{e}_r$)

Sample Problem 5/15

The slider-crank mechanism of Sample Problem 5/9 is repeated here. The crank OB has a constant clockwise angular speed of 1500 rev/min. For the instant when the crank angle θ is 60°, determine the acceleration of the piston A and the angular acceleration of the connecting rod AB.



โจทย์ถามหา ความเร่งเชิงที่ตำแหน่ง A: $\vec{a}_A$=? และความเร่งเชิงมุมของ link AB: $\vec{\alpha}_{AB}$=?

วิธีทำ

ผลลัพธ์จาก Problem 5/9 ความเร็วเชิงมุมของ link AB คือ

$$\vec{\omega}_{AB} = 29.5\ rad/s\ (CCW) = 29.5\hat{k}\ rad/s$$

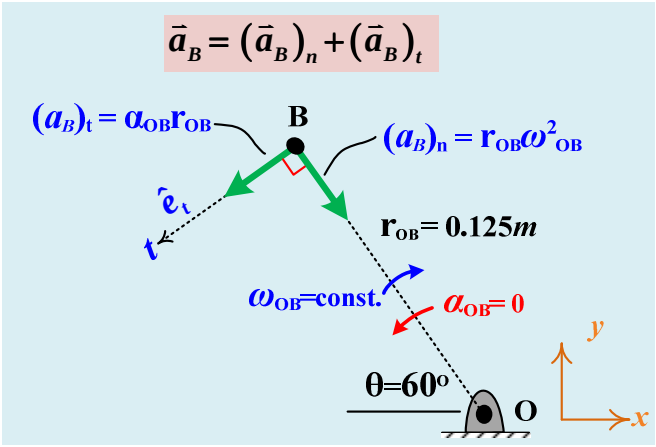
เริ่มต้นด้วยสมการที่มีตัวแปรที่โจทย์ถามหา $\vec{\alpha}_{AB}, \vec{a}_A$ ซึ่งพิจาณาได้จากสมการความเร่งสัมพัทธ์จุด A เทียบต่อ B (เหตุผล เพราะทราบความเร่งที่ B)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \rightarrow (1)$$

ซึ่ง $\vec{a}_B$ $\vec{a}_A$ และ $\vec{a}_{A/B}$ พิจารณาได้จากรูปต่อไปนี้

❖ ความเร่งจุด B

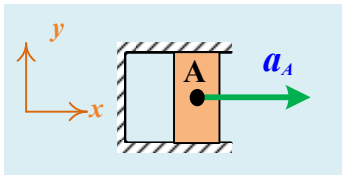
$$\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$$



$$\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$$
$$= -(\omega^2_{OB} r_{OB})\hat{e}_r + (\alpha_{OB} r_{OB})\hat{e}_t$$
$$= \left(\frac{1500(2\pi)}{60}\right)^2 \left[-0.125\left(-\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j}\right)\right] + 0$$

$$\vec{a}_B = 0.125\left(\frac{1500(2\pi)}{60}\right)^2 \left(\cos 60^\circ \vec{i} - \sin 60^\circ \vec{j}\right) \rightarrow (2)$$

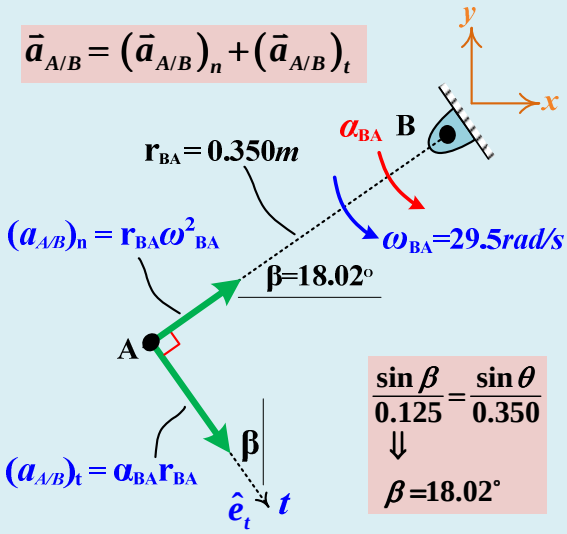
❖ ความเร่งจุด A : กำหนดทิศ $\vec{a}_A(+\vec{i})$



$$\vec{a}_A = a_A \vec{i}\ \ m/s^2 \rightarrow (3)$$

❖ ความเร่งสัมพัทธ์ A/B : กำหนดทิศ $\vec{\alpha}_{AB}(+\hat{k})$

$$\vec{a}_{A/B} = (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$



$$\vec{a}_{A/B} = (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t \rightarrow (4)$$

ซึ่ง

$$(\vec{a}_{A/B})_n = -\omega^2_{BA} r_{BA} \hat{e}_r$$
$$= 29.5^2\left(-0.35\left(-\cos\beta \vec{i} - \sin\beta \vec{j}\right)\right)$$

$$(\vec{a}_{A/B})_n = 29.5^2 (0.35)\left(\cos 18.02^\circ \vec{i} + \sin 18.02^\circ \vec{j}\right)\ m/s^2$$

และ

$$(\vec{a}_{A/B})_t = \alpha_{BA}\,\vec{r}_{BA}\,\hat{e}_t$$
$$= \alpha_{BA}\left(0.35\left(+\sin\beta\,\vec{i} - \cos\beta\,\vec{j}\right)\right)$$

$$(\vec{a}_{A/B})_t = 0.35\,\alpha_{BA}\left(\sin 18.02^\circ\,\vec{i} - \cos 18.02^\circ\,\vec{j}\right) m/s^2$$

แทนค่าสมการ (2) (3) (4) ในสมการ (1) แล้วแยก สปส. หน้าเวกเตอร์ $\vec{i}, \vec{j}$ จะได้

$\vec{i}$–*term*:

$$a_A = 0.125\left(\frac{1500(2\pi)}{60}\right)^2 \cos 60^o + 29.5^2\,(0.35)\cos 18.02^\circ + 0.35\,\alpha_{BA}\sin 18.02^\circ$$

$\vec{j}$–*term*:

$$0 = -0.125\left(\frac{1500(2\pi)}{60}\right)^2 \sin 60^o + 29.5^2\,(0.35)\sin 18.02^\circ - 0.35\,\alpha_{BA}\cos 18.02^\circ$$

หรือ

$\vec{i}$–*term*: $a_A = 1831.77 + 0.1083\,\alpha_{BA}$ (*)

$\vec{j}$–*term*: $0 = -2576.82 - 0.333\,\alpha_{BA}$ (**)

แก้ระบบสมการ (*) และ (**) จะได้

$$\alpha_{BA} = -7742 \Rightarrow \vec{\alpha}_{BA} = 7742\ rad/s^2\,(CW)\quad \underline{\underline{Ans}}$$
$$a_A = 993 \Rightarrow \vec{a}_A = 993\ m/s^2\,(\rightarrow)\quad \underline{\underline{Ans}}$$

อภิปราย: วิธีการแก้ปัญหา Problem5/15 นี้จะแตกต่างจากวิธีการแก้ปัญหา Problem 5/14 คือ จาก Problem 5/14 เราพบว่าทิศทางของความเร่งทั้งหมดเราทราบว่า

1) ความเร่งในแนวตั้งฉาก (normal $\vec{a}_n$) : มีขนาดเท่ากับ $r\omega^2$ ทิศทางพุ่งเข้าสู่จุดหมุนเสมอ โดยไม่ขึ้นกับทิศทางการหมุน (ทั้ง CCW และ CW) ซึ่งทิศทางที่ว่านี้คือ $(-\hat{e}_r)$ เป็น unit vector ของ $\vec{r}$

2) ความเร่งในแนวสัมผัส (tangent $\vec{a}_t$) : มีขนาดเท่ากับ αr ซึ่งจะตั้งฉากกับ $\hat{e}_r$ หัวลูกศรทิศทางไปตาม $\vec{\alpha}$ ที่เรากำหนด (ปกติกำหนดเป็น CCW ไว้ก่อน) นั้นก็หมายความว่าเราทราบ unit vector ของ $\hat{e}_t$

ดังนั้น เมื่อทราบทั้งขนาดและทิศทางของความเร่งทั้งหมดแล้ว ก็สามารถนำมารวมกันแบบเวกเตอร์ได้โดยง่าย โดยไม่ต้องผ่านการ Cross vector เช่น $\vec{a}_n = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ และ $\vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r}$ (นักศึกษาจำนวนไม่น้อยจะผิดพลาดจากการ cross vector เพียงเพราะไม่ระมัดระวัง ใจร้อน หรือใช้เวลานานมาก จนล้มเลิกไปในที่สุด) จากนั้น ใช้วิธีการแยกสัมประสิทธิ์หน้า unit vector $\vec{i}, \vec{j}$ แล้วแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบ

แบบฝึกหัดท้ายบท

รายวิชา

พลศาสตร์วิศวกรรม

[ENGINEERING DYNAMICS]

บทที่ 5 Plane Kinematics

of Rigid Bodies

โดย

วิทูรย์ เห็มสุวรรณ

ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....ชื่อ:..... รหัส:.....

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5: Plan Kinematics of Rigid bodies

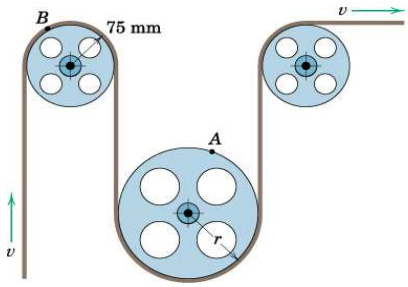
ส่วนที่ 1 การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์ (Absolute Motion)

1.1 การเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotation)

ข้อที่ 1 ([1] Problems 5/5)

5/5 Magnetic tape is fed over and around the light pulleys mounted in a computer frame. If the speed v of the tape is constant and if the ratio of the magnitudes of the acceleration of points A and B is 2/3, determine the radius r of the larger pulley.

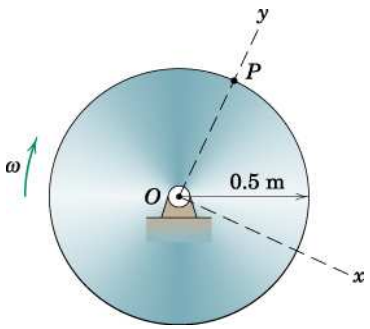
Ans. $r = 112.5$ mm



ข้อที่ 2 ([1] Problems 5/9)

5/9 The circular disk rotates about its center O in the direction shown. At a certain instant point P on the rim has an acceleration given by $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ m/s^2. For this instant determine the angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ and angular acceleration $\boldsymbol{\alpha}$ of the disk.

Ans. $\boldsymbol{\omega} = -\sqrt{8}\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha} = 6\mathbf{k}$ rad/s^2



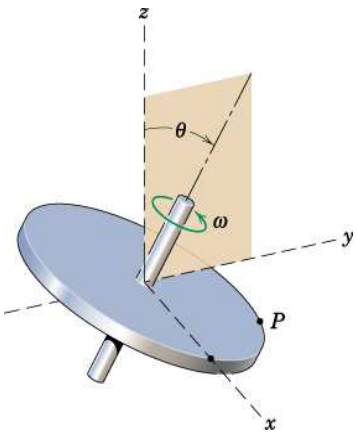
ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....ชื่อ:..... รหัส:.....

ข้อที่ 3 ([1] Problems 5/13)

5/13 The circular disk rotates with a constant angular velocity $\omega = 40$ rad/s about its axis, which is inclined in the y-z plane at the angle $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$. Determine the vector expressions for the velocity and acceleration of point P, whose position vector at the instant shown is $\mathbf{r} = 375\mathbf{i} + 400\mathbf{j} - 300\mathbf{k}$ mm. (Check the magnitudes of your results from the scalar values $v = r\omega$ and $a_n = r\omega^2$.)

Ans. $\mathbf{v} = -20\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ m/s

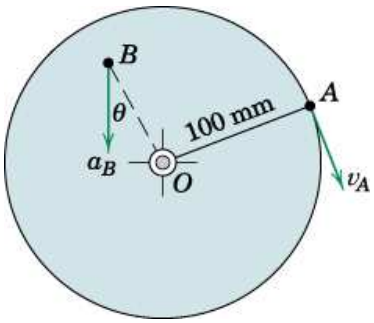
$\mathbf{a} = -600\mathbf{i} - 640\mathbf{j} + 480\mathbf{k}$ m/s^2



ข้อที่ 4 ([1] Problems 5/25)

5/25 The circular disk rotates about its center O. At a certain instant point A has a velocity $v_A = 0.8$ m/s in the direction shown, and at the same instant the tangent of the angle θ made by the total acceleration vector of any point B with its radial line to O is 0.6. For this instant compute the angular acceleration α of the disk.

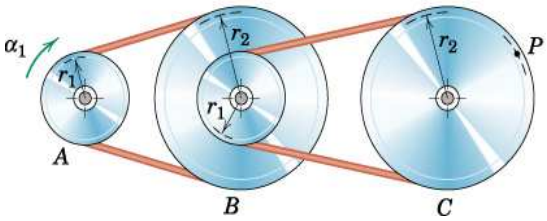
Ans. $\alpha = 38.4$ rad/s^2



ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

ข้อที่ 5 ([1] Problems 5/26)

5/26 A V-belt speed-reduction drive is shown where pulley A drives the two integral pulleys B which in turn drive pulley C. If A starts from rest at time $t = 0$ and is given a constant angular acceleration α_1, derive expressions for the angular velocity of C and the magnitude of the acceleration of a point P on the belt, both at time t.



$$Ans.\ \omega_C = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t$$

$$a_P = \frac{r_1^2}{r_2}\alpha_1\sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \alpha_1^2 t^4}$$

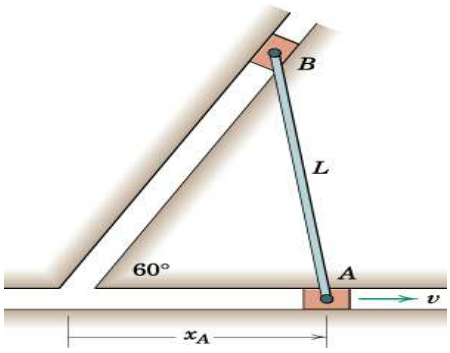
ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

1.2. ความสัมพันธ์การเคลื่อนที่เชิงเส้นและเชิงมุม (Relationship of Linear and Angular motion)

ข้อที่ 1 ([1] Problems 5/27)

5/27 Slider A moves in the horizontal slot with a constant speed v for a short interval of motion. Determine the angular velocity ω of bar AB in terms of the displacement x_A.

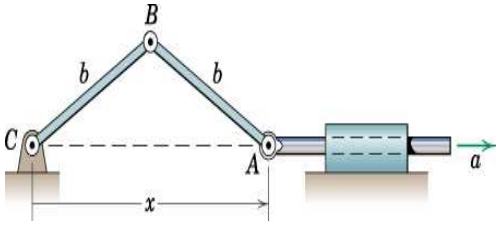
$$Ans.\ \omega = \frac{\sqrt{3}v}{2L\sqrt{1 - \frac{3x_A^2}{4L^2}}}$$



ข้อที่ 2 ([1] Problems 5/29)

5/29 Point A is given a constant acceleration a to the right starting from rest with x essentially zero. Determine the angular velocity ω of link AB in terms of x and a.

$$Ans.\ \omega = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{4b^2 - x^2}}$$

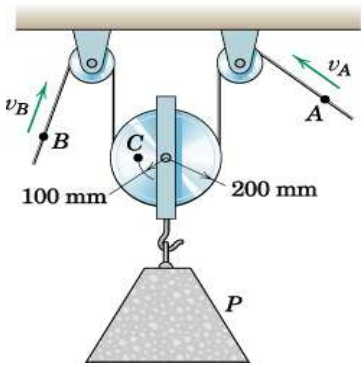


ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....ชื่อ:..... รหัส:.....

ข้อที่ 3 ([1] Problems 5/31)

5/31 The concrete pier P is being lowered by the pulley and cable arrangement shown. If points A and B have velocities of 0.4 m/s and 0.2 m/s, respectively, compute the velocity of P, the velocity of point C for the instant represented, and the angular velocity of the pulley.

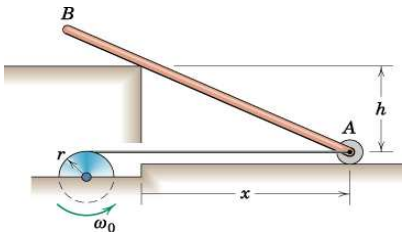
Ans. $\omega = 0.5$ rad/s CW, $v_P = 0.3$ m/s
$v_C = 0.25$ m/s



ข้อที่ 4 ([1] Problems 5/37)

5/37 Calculate the angular velocity ω of the slender bar AB as a function of the distance x and the constant angular velocity ω_0 of the drum.

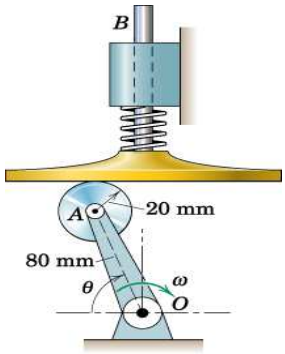
Ans. $\omega = \dfrac{rh\omega_0}{x^2 + h^2}$



ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....ชื่อ:..... รหัส:.....

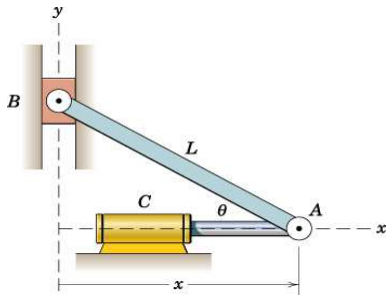
ข้อที่ 5 ([1] Problems 5/46)

5/46 Determine the acceleration of the shaft B for $\theta = 60°$ if the crank OA has an angular acceleration $\ddot{\theta} = 8$ rad/s^2 and an angular velocity $\dot{\theta} = 4$ rad/s at this position. The spring maintains contact between the roller and the surface of the plunger.



ข้อที่ 6 ([1] Problems 5/48)

5/48 The hydraulic cylinder C gives end A of link AB a constant velocity v_0 in the negative x-direction. Determine expressions for the angular velocity $\omega = \dot{\theta}$ and angular acceleration $\alpha = \ddot{\theta}$ of the link in terms of x.



ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....ชื่อ:..... รหัส:.....

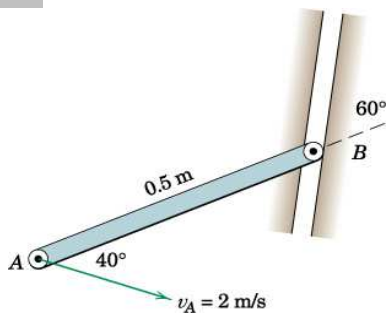
ส่วนที่ 2 การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์ (Relative Motion)

2.1 ความเร็วสัมพัทธ์เนื่องจากการหมุน (Relative velocity due to rotation)

ข้อที่ 1 ([1] Problems 5/59)

5/59 End A of the link has the velocity shown at the instant depicted. End B is confined to move in the slot. For this instant calculate the velocity of B and the angular velocity of AB.

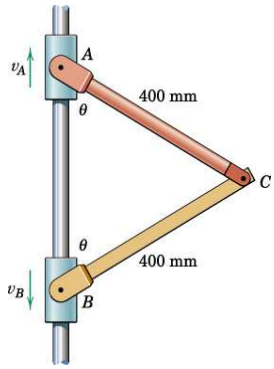
Ans. $v_B = 3.06$ m/s, $\omega_{AB} = 7.88$ rad/s CCW



ข้อที่ 2 ([1] Problems 5/59)

5/63 For a short interval, collars A and B are sliding along the fixed vertical shaft with velocities $v_A = 2$ m/s and $v_B = 3$ m/s in the directions shown. Determine the magnitude of the velocity of point C for the position $\theta = 60°$.

Ans. $v_C = 1.528$ m/s

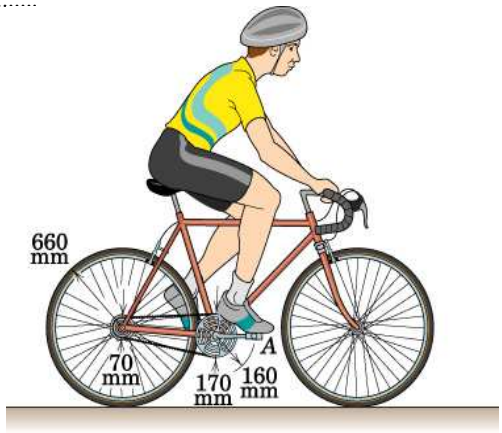


ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

ข้อที่ 3 ([1] Problems 5/69)

5/69 The rider of the bicycle shown pumps steadily to maintain a constant speed of 16 km/h against a slight head wind. Calculate the maximum and minimum magnitudes of the absolute velocity of the pedal A.

Ans. $(v_A)_{max} = 5.33$ m/s
$(v_A)_{min} = 3.56$ m/s

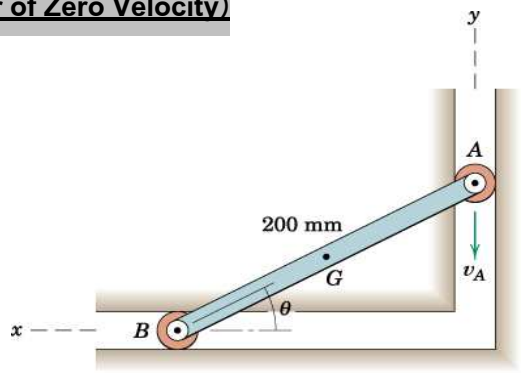


ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

2.2 การวิเคราะห์ความเร็วแบบจุดหมุนชั่วขณะ (Instantaneous Center of Zero Velocity)

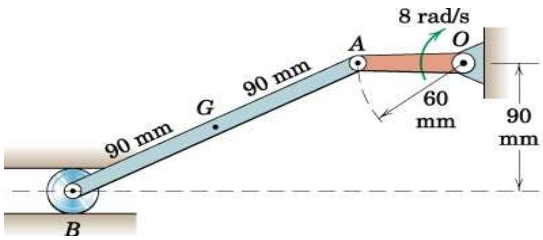
ข้อที่ 1 ([1] Problems 5/94)

5/94 The constrained link of Prob. 5/81 is repeated here. End A of the link has a downward velocity v_A of 2 m/s during an interval of its motion. For the position where $\theta = 30°$, determine by the method of this article the angular velocity ω of AB and the velocity v_G of the midpoint G of the link.



ข้อที่ 2 ([1] Problems 5/96)

5/96 For the instant represented, when crank OA passes the horizontal position, determine the velocity of the center G of link AB by the method of this article.

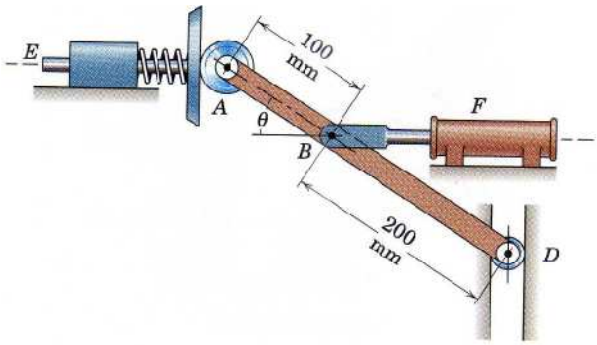


ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

ข้อที่ 3 ([1] Problems 5/109)

5/109 Horizontal oscillation of the spring-loaded plunger E is controlled by varying the air pressure in the horizontal pneumatic cylinder F. If the plunger has a velocity of 2 m/s to the right when $\theta = 30°$, determine the downward velocity v_D of roller D in the vertical guide and find the angular velocity ω of ABD for this position.

Ans. $v_D = 2.31$ m/s, $\omega = 13.33$ rad/s

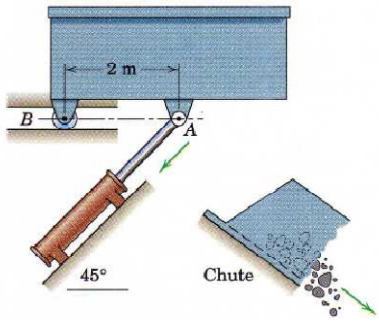


ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

2.3 การวิเคราะห์ความเร่งสัมพัทธ์ (Relative Acceleration)

ข้อที่ 1 ([1] Problems 5/126)

5/126 A container for waste materials is dumped by the hydraulically-activated linkage shown. If the piston rod starts from rest in the position indicated and has an acceleration of 0.5 m/s^2 in the direction shown, compute the initial angular acceleration of the container.

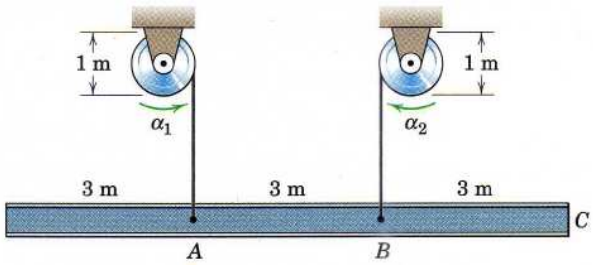


ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

ข้อที่ 2 ([1] Problems 5/127)

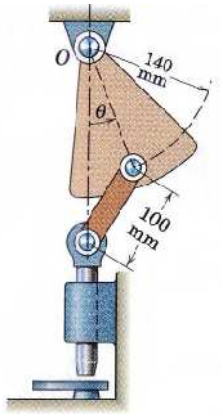
5/127 The 9-m steel beam is being hoisted from its horizontal position by the two cables attached at A and B. If the initial angular accelerations of the hoisting drums are $\alpha_1 = 0.5$ rad/s^2 and $\alpha_2 = 0.2$ rad/s^2 in the directions shown, determine the corresponding angular acceleration α of the beam, the acceleration of C, and the distance b from B to a point P on the beam centerline which has no acceleration.

Ans. $\alpha = 0.05$ rad/s^2 CW, $a_C = 0.05$ m/s^2 down
$b = 2$ m right of B



ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

ข้อที่ 3 ([1] Problems 5/130)



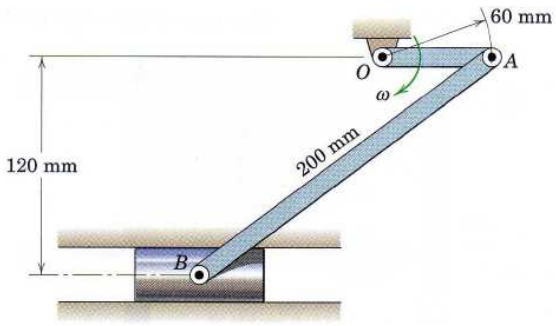
5/130 The punch, repeated here from Prob. 5/57, is operated by a simple harmonic motion of the pivoted sector given by $\theta = \theta_0 \sin 2\pi t$. By the method of this article, calculate the acceleration of the punch when $\theta = 0$ if the amplitude $\theta_0 = \pi/12$ rad.

ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

ข้อที่ 4 ([1] Problems 5/149)

5/149 For a short interval of motion, link OA has a constant angular velocity $\omega = 4$ rad/s. Determine the angular acceleration α_{AB} of link AB for the instant when OA is parallel to the horizontal axis through B.

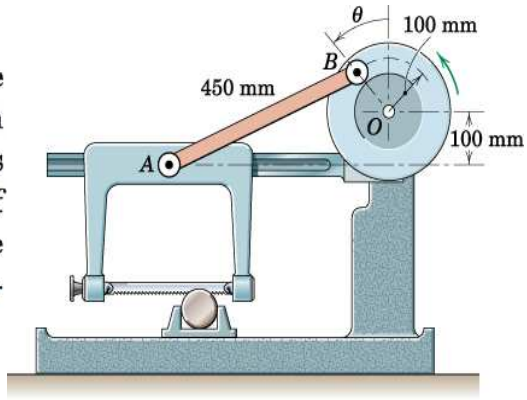
Ans. $\alpha_{AB} = 1.688$ rad/s^2 CCW



ลำดับที่...../.....ที่นั่ง Zone:.....**ชื่อ:**..... **รหัส:**.....

ข้อที่ 5 ([1] Problems 5/150)

5/150 The elements of a power hacksaw are shown in the figure. The saw blade is mounted in a frame which slides along the horizontal guide. If the motor turns the flywheel at a constant counterclockwise speed of 60 rev/min, determine the acceleration of the blade for the position where $\theta = 90°$, and find the corresponding angular acceleration of the link AB.



ตำราอ้างอิง

[1] Meriam J. L., and Kraige L. G. *"Engineering Mechanics: Dynamics,"* 6th Ed., John Wil